Lois de probabilités - Loi Normale

F. Lancereau

12 mai 2025

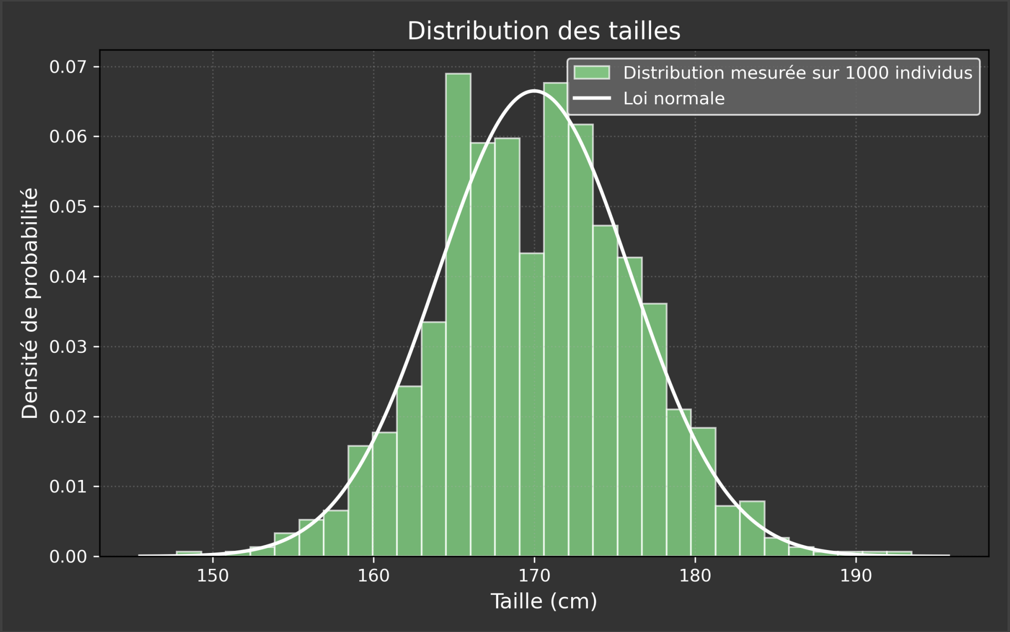
Pourquoi une nouvelle loi ?

- Nous avons vu la loi binomiale : adaptée à des variables discrètes (succès/échecs).
- Mais certains phénomènes réels sont **continus**.
- Ils suivent une distribution en forme de **cloche symétrique**

La loi normale

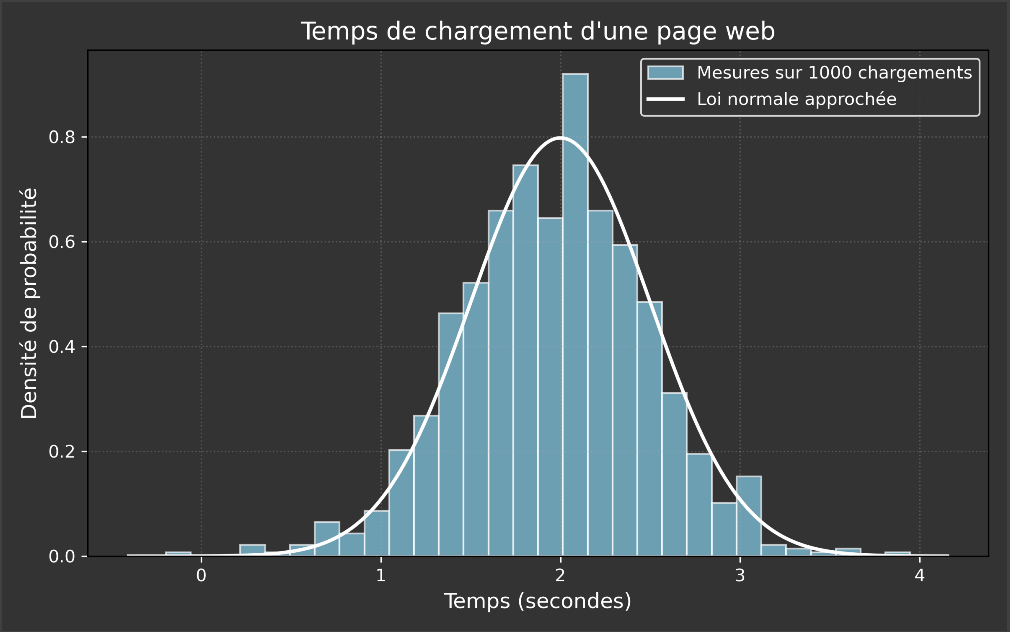
Exemple 1 : Taille d'une population

« Si l'on mesure la taille de 1000 personnes choisies au hasard, puis qu'on trace un histogramme du nombre de personnes par tranche de taille (en cm), on obtient une courbe en forme de cloche. »


Distribution des tailles
Distribution mesurée sur 1000 individus
Loi normale
Densité de probabilité
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
150
160
170
180
190
Taille (cm)

Exemple 2 : Temps de chargement d’une page web

- Un développeur mesure le temps de chargement d’une page sur 1000 essais.
- Les temps sont concentrés autour de **2 secondes**, avec peu de cas extrêmes (moins d’une seconde ou plus de 3 sec.).
- La distribution des mesures forme une **courbe en cloche**, caractéristique d’une loi normale.

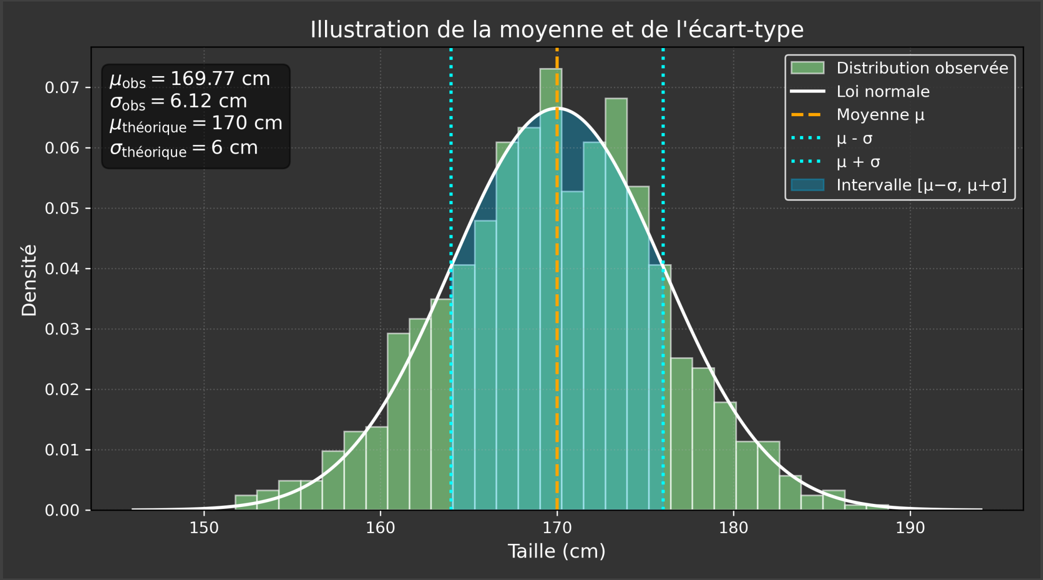

Temps de chargement d'une page web
Mesures sur 1000 chargements
Loi normale approchée
Densité de probabilité
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
1
2
3
4
Temps (secondes)

Une forme de cloche familière

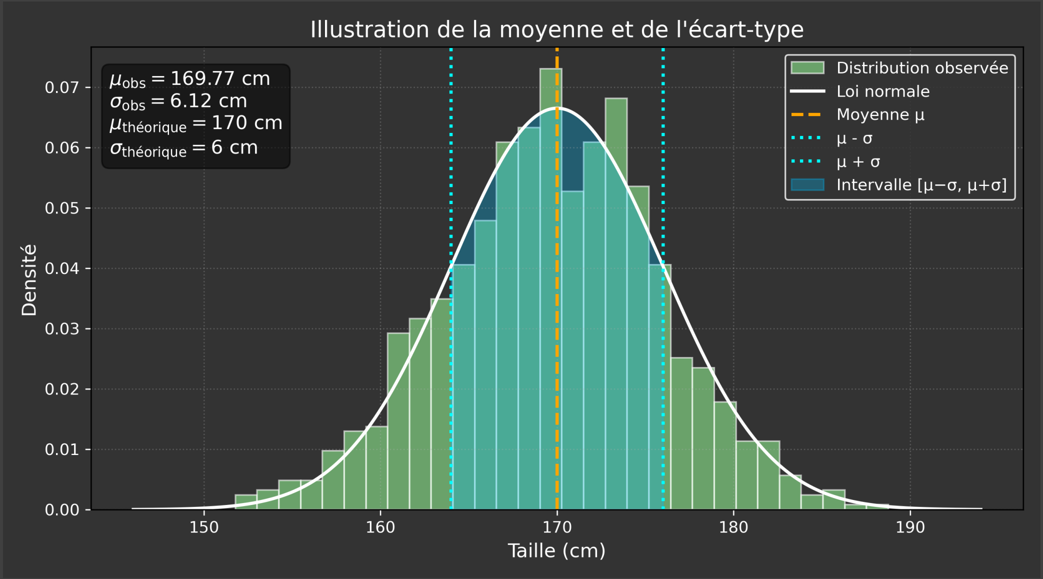
- Beaucoup de phénomènes aléatoires se regroupent autour d'une valeur centrale.
- Plus on s'éloigne de cette valeur, plus les cas deviennent rares.
- C'est la forme typique d'une **courbe normale**.

Définition intuitive

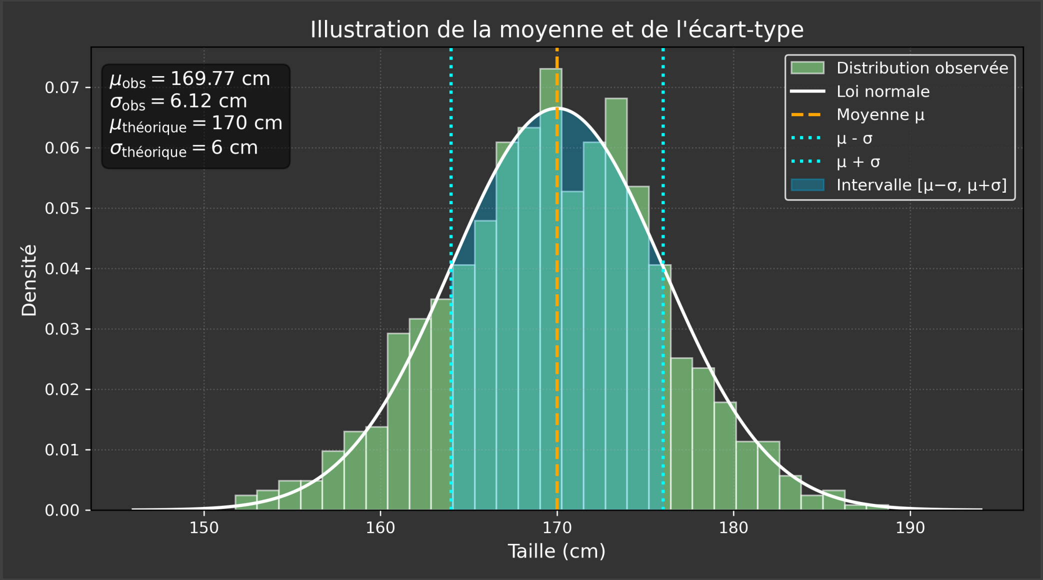
- Une variable aléatoire suit une loi normale si sa distribution est continue, symétrique et en forme de cloche.
- Deux paramètres :
  - La moyenne μ (centre)
  - L'écart-type σ (étalement)



La moyenne μ est la valeur centrale de la distribution.



L'écart-type σ mesure la dispersion autour de μ.



Environ 68% des individus se situent entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$.

Loi de probabilité continue

Idée essentielle

Une **loi de probabilité continue** ne donne pas la probabilité d'une valeur exacte, mais la probabilité que la variable prenne une **valeur dans un intervalle**.

- Cette probabilité s'interprète comme une **aire sous une courbe**.
- La courbe correspond à une **fonction de densité**, notée f, **continue**, **positive** et son aire totale sur $I \subseteq \mathbb{R}$ est **égale à 1**.

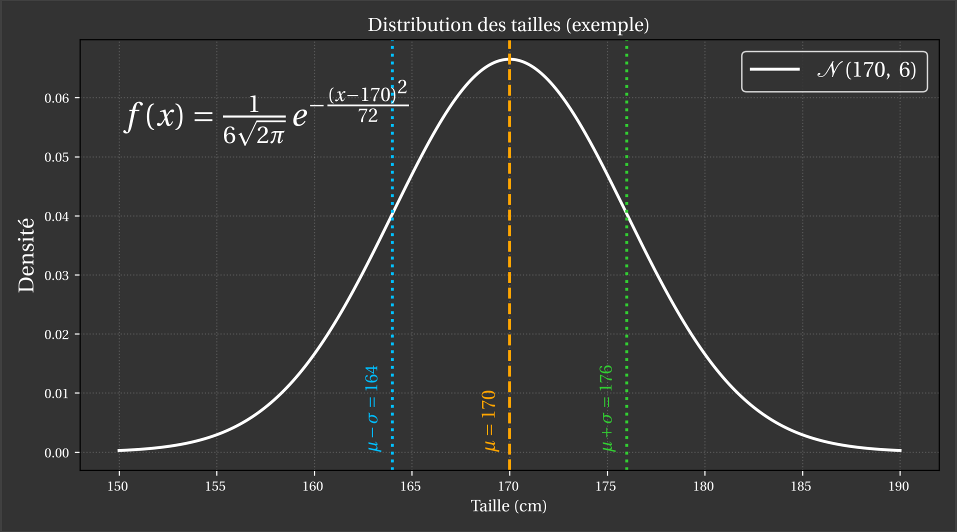
Définition de la loi normale

Une variable aléatoire X suit une **loi normale** de moyenne μ et d'écart-type σ si sa fonction de densité est :

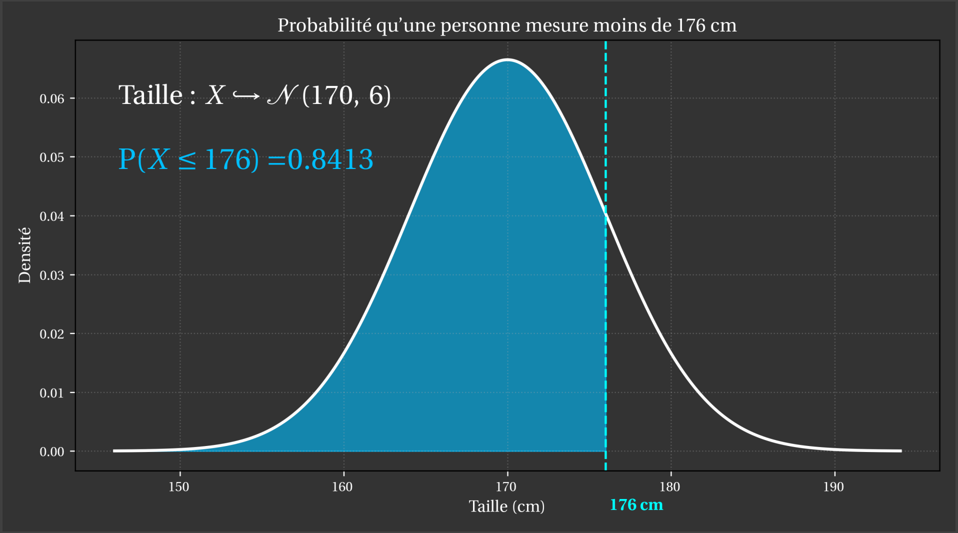
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Cette loi est notée : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

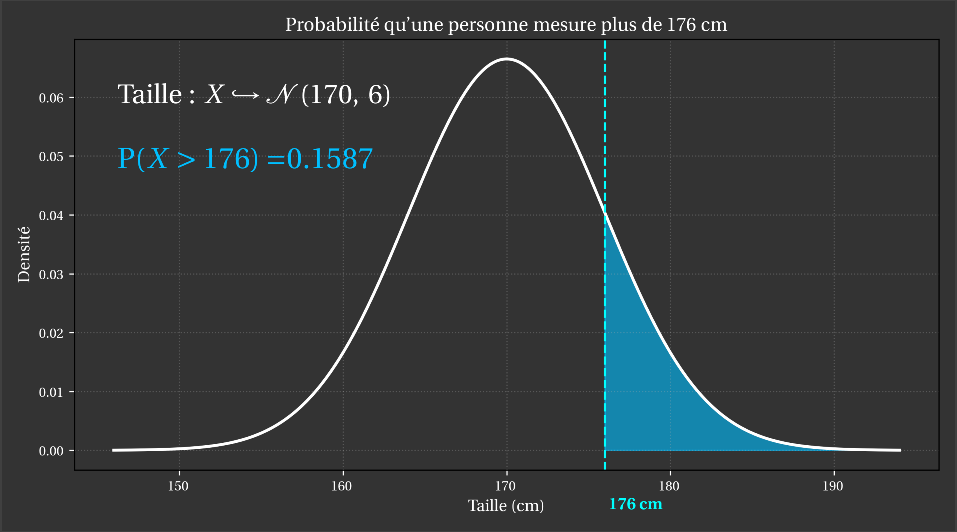
Fonction de distribution



Calculer une probabilité – Fonction de répartition



Calculer une probabilité



Comment a-t-on obtenu ces probabilités ?

Question centrale

Comment calcule-t-on une probabilité comme :

$$\mathbf{P}(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x$$

On note : $\Pi(t) = P(X \leq t)$

Remarque : $P(X \leq t) = P(X < t)$ car la loi normale est continue.

Comment a-t-on obtenu ces probabilités ?

Exemples issus des graphiques

- $P(X \leq 176) = 0{,}8413$

$$\mathbf{P}(X \leqslant 176) = \int_{-\infty}^{176} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-176)^2}{72}}\, \mathrm{d}x$$

- $P(X > 176) = 0{,}1587$

$$P(X > 176) = 1 - P(X \leq 176) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

Comment a-t-on obtenu ces probabilités ?

Mais... on ne peut pas faire ce calcul "à la main"

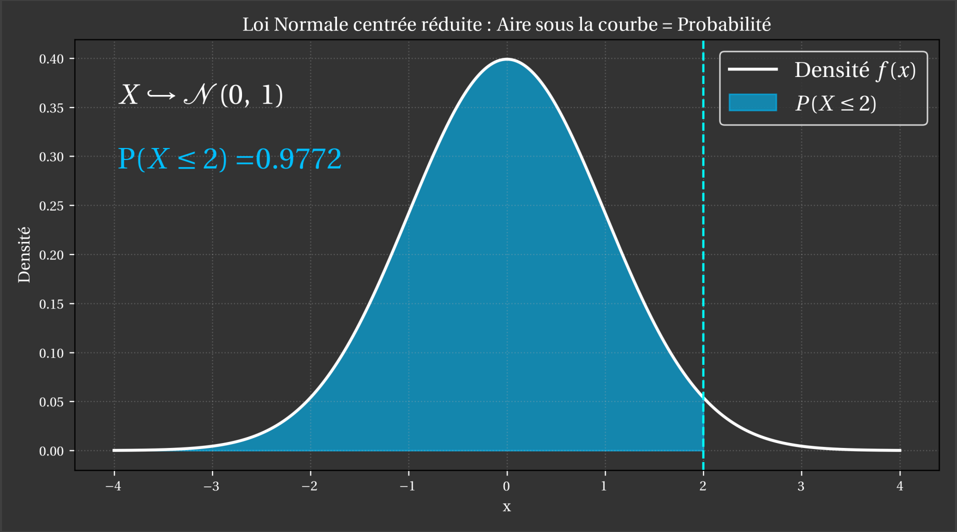
- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ **n'est pas primitivable**.
- Il est donc impossible de trouver une formule exacte pour cette intégrale.

Comment a-t-on obtenu ces probabilités ?

Ce qu'on va faire ensuite

- On transforme la variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- En une variable centrée réduite $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$
- Pour utiliser une table ou un outil de calcul sur la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Loi Normale centrée réduite



Lecture dans la table de la loi normale centrée réduite

Objectif

Trouver la valeur de $P(X \leq 2)$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

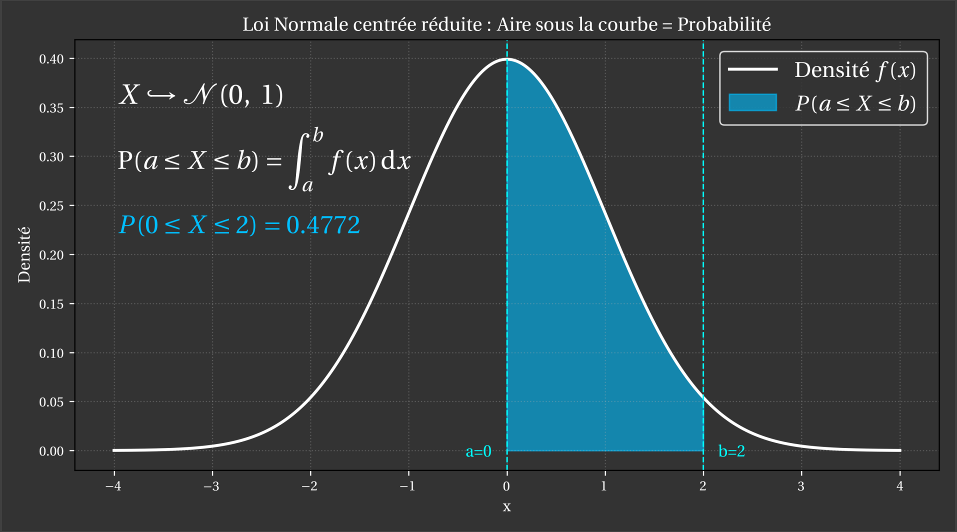
$P(X \leq 2{,}00) = \mathbf{0{,}9772}$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875

- On cherche dans la ligne 2.0 (partie entière + premier chiffre après la virgule),
- puis dans la colonne 0.00 (deuxième chiffre),
- ce qui donne **0.9772**.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875

Loi Normale centrée réduite



Origine et forme de la loi normale

- La loi normale est aussi appelée **loi de Gauss**, en hommage au mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777–1855).
- Sa courbe de densité est connue sous le nom de **courbe en cloche** , en raison de sa forme caractéristique.

Synthèse

- La loi normale modélise des phénomènes continus symétriques autour d'une moyenne.
- Elle est définie par deux paramètres :
  - moyenne μ et
  - écart-type σ.
- La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est utilisée pour les calculs.
- La suite dans ton cours !