Coniques : Ellipses et Hyperboles

F. Lancereau

Mai 2025

Qu’est-ce qu’une conique ?

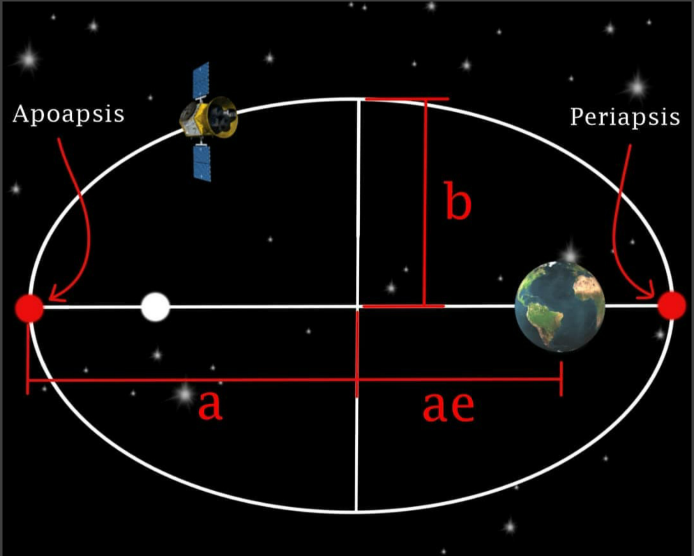
- Lieux de points définis par des conditions géométriques.
- Trois types : parabole, ellipse, hyperbole.
- Nous étudions ici : ellipse et hyperbole.

Exemples de coniques

Exemple

- Une ellipse peut modéliser l'orbite d'une planète.
- En biologie, certains modèles de croissance des populations utilisent des fonctions hyperboliques pour décrire la dynamique des populations dans des environnements limités en ressources.

Illustration



Définition géométrique de l’ellipse

Définition

L’ellipse est l’ensemble des points tels que la somme des distances à deux points fixes (les foyers) est constante.

Définition géométrique de l'ellipse

Soit deux points F et F' du plan et a un réel strictement positif.

Ellipse du jardinier

L'ensemble $\mathbb{E}$ des points du plan M vérifiant

$$\mathbb{E} \equiv \overline{MF} + \overline{MF'} = 2a$$

est une ellipse.

Les points F et F' sont appelés les foyers de l'ellipse.

La droite FF' est la droite (ou axe) focale.

Exemple d'ellipse

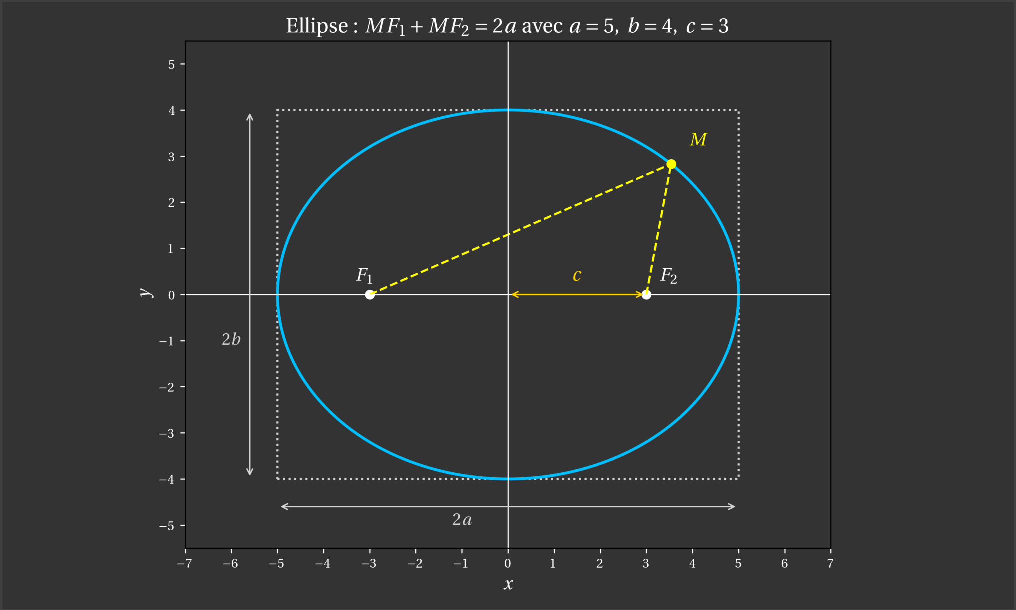
Exemple

Les points M tels que $MF_1 + MF_2 = 10$ avec $F_1(-3,0)$ et $F_2(3,0)$ forment une ellipse.

Remarque

On commence par le cas d'une ellipse centrée à l'origine :

- le centre est en $(0,0)$
- les foyers sont symétriques par rapport à ce centre.


Ellipse : $MF_1 + MF_2 = 2a$ avec $a = 5,\ b = 4,\ c = 3$
M
F_1
F_2
c
$2b$
$2a$
x
y

Équation réduite de l'ellipse

Soient deux réels a et c vérifiant $0 < c < a$.

Définition bifocale versus équation cartésienne

Si $F = (c;0)$ et $F' = (-c;0)$ alors

$$\mathbb{E} \equiv \overline{MF} + \overline{MF'} = 2a \iff \mathbb{E} \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Équation réduite de l'ellipse

Une ellipse est aussi définie par l'équation suivante

$$b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2 \text{ avec } a^2 = b^2 + c^2$$

Comme $a > b$,

- a : est appelé le demi grand axe, et
- b : le demi petit axe.

Exemple d'ellipse

Exemple

Les points M tels que $MF_1 + MF_2 = 10$ avec $F_1(-3,0)$ et $F_2(3,0)$ forment une ellipse.

- $MF_1 + MF_2 = 10 \implies a = 5$
- $F_1(-3,0)$ et $F_2(3,0) \implies c = 3$

$$\mathbb{E} \equiv \overline{MF} + \overline{MF'} = 10 \iff \mathbb{E} \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

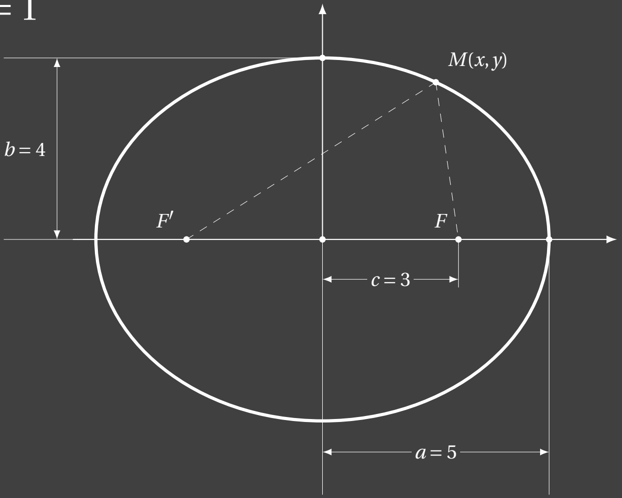
Exemple d'ellipse

$$\mathbb{E} \equiv \overline{MF} + \overline{MF'} = 10 \iff \mathbb{E} \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

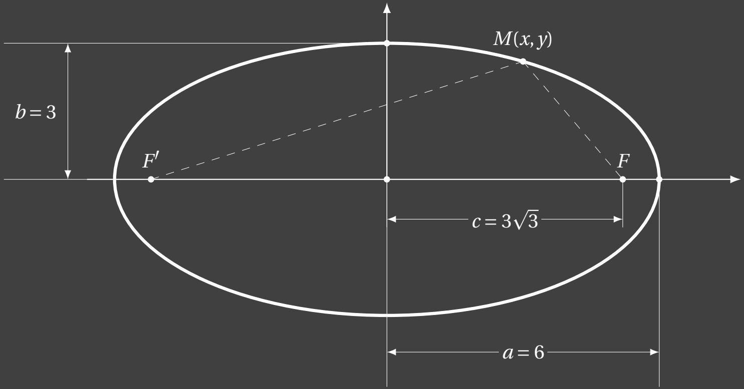
$$\iff \mathbb{E} \equiv 16\,x^2 + 25\,y^2 = 400$$

$$\iff \mathbb{E} \equiv 16\,x^2 + 25\,y^2 - 400 = 0$$

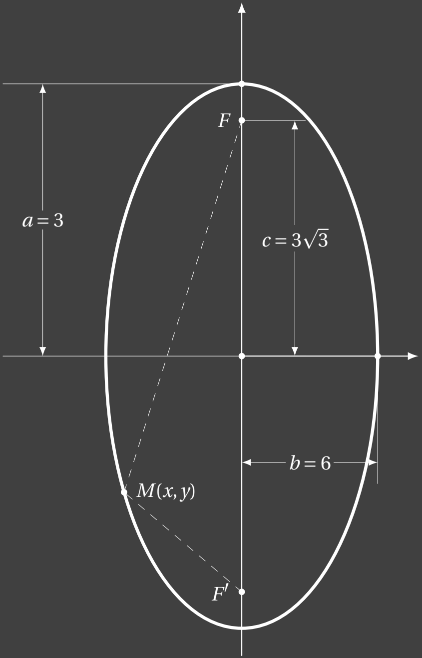
$$\mathbb{E}_1 \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



$$\mathbb{E}_2 \equiv \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$



$$\mathbb{E}_3 \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$$



Ellipse centrée hors origine

Symétrie / Translation

Si $A\left(x_A; y_A\right)$ est le centre de symétrie de l'ellipse et $d_{FF'} \parallel Ox$ alors :

$$\mathbb{E} \equiv \frac{(x-x_A)^2}{a^2} + \frac{(y-y_A)^2}{b^2} = 1$$

ou paramétriquement : $\begin{cases} x(\theta) = x_A + a \cdot \cos(\theta) \\ y(\theta) = y_A + b \cdot \sin(\theta) \end{cases}$

Ellipse centrée hors origine

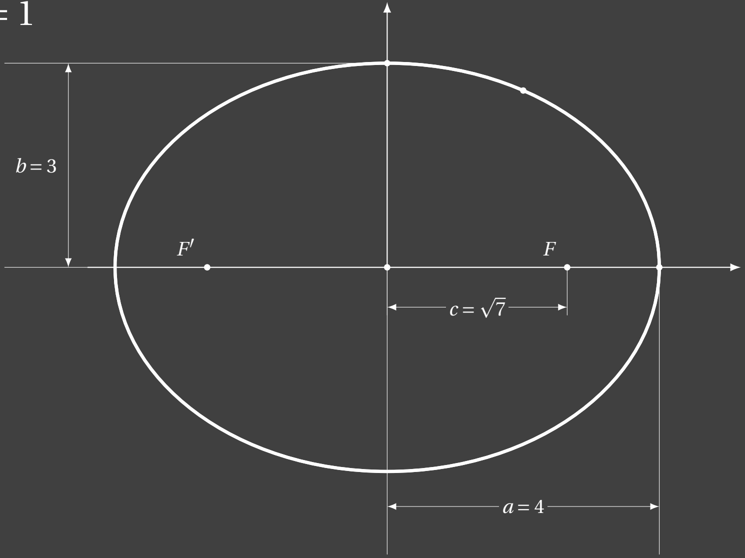
Exemple

Considérons une ellipse centrée en $A(2,-1)$ avec $a=4$ et $b=3$.

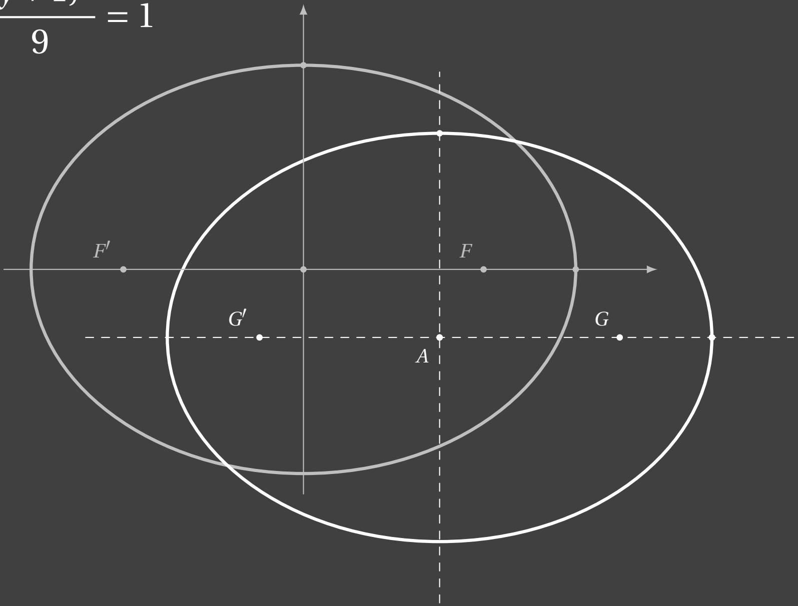
L'équation de l'ellipse est donnée par :

$$\mathbb{E} \equiv \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

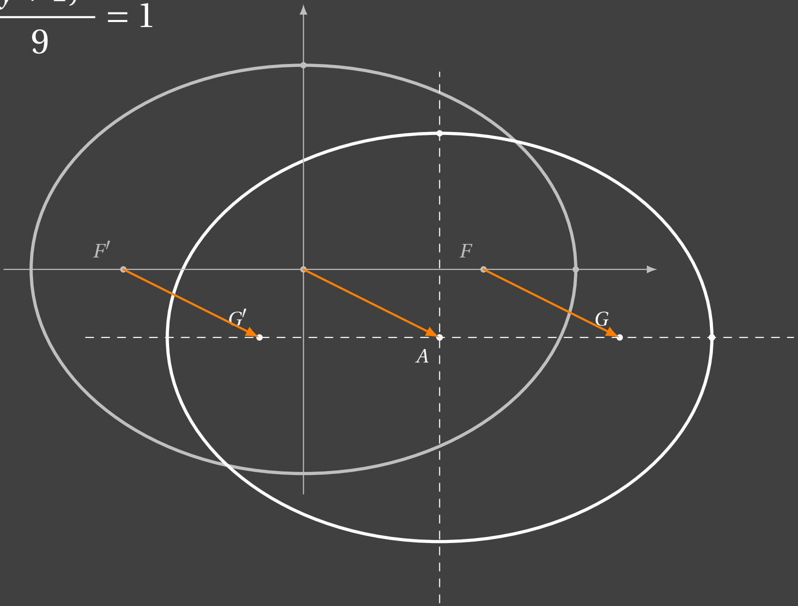
$$\mathbb{E}_0 \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$



$$\mathbb{E} \equiv \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$



$$\mathbb{E} \equiv \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$



Représentation paramétrique

Exemple (suite)

La représentation paramétrique de cette ellipse est :

$$\begin{cases} x(\theta) = 2 + 4\cos(\theta) \\ y(\theta) = -1 + 3\sin(\theta) \end{cases}$$

où θ est le paramètre angulaire variant de 0 à 2π.