De l'Algèbre vers la Géométrie

1 Soit le lieu Γ des points $M(x, y)$ qui verifient $x^2 + y^2 - x + 3y + 1 = 0$

(a) Montrer que l'on peut mettre l'équation de Γ sous la forme réduite $X^2 + Y^2 = \frac{3}{2}$

(b) Quelle est la nature (cercle, ellipse, hyperbole) de Γ ? Indiquer ses caractéristiques.

Solution:

(a) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 - x + 3y + 1 = 0 &\iff x^2 - x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + y^2 + 3y + \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{4} + 1 = 0 \\ &\iff \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} + \left(y + \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} + 1 = 0 \\ &\iff \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

la forme réduite correspond.

(b) la nature de la conique est un cercle de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et de centre $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

2 Considérons le lieu Γ des points $M(x, y)$ qui vérifient : $4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$

(a) Montrez que l'on peut mettre l'équation de Γ sous la forme (pré-)réduite $\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 = 1$

(b) Déterminez l'équation réduite de la conique Γ. Quelle est la nature de Γ ? En déduire ses caractéristiques (la coordonnée de son centre, la longueur du grand axe, du petit axe, la distance entre les deux foyers).

Solution:

(a) $$\begin{aligned} 4x^2 - 24x + 9y^2 + 36y + 36 = 0 &\iff 4(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 4y) + 36 = 0 \\ &\iff 4(x^2 - 6x + 9) - 36 + 9(y^2 + 4y + 4) - 36 + 36 = 0 \\ &\iff 4(x-3)^2 - 36 + 9(y+2)^2 - 36 + 36 = 0 \\ &\iff 4(x-3)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \end{aligned}$$

Divisons toute l'équation par 36 : $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

(b) l'équation réduite de la conique est $\dfrac{X^2}{3^2} + \dfrac{Y^2}{2^2} = 1$: cette forme correspond à celle d'une ellipse.

centre de Γ : $(3, -2)$, longueur du grand axe $a = 3$, longueur du petit axe $b = 2$

axe focal horizontal : $d(\mathrm{F}, \mathrm{F}') = 2c = 2\sqrt{9-4} = 2\sqrt{5}$

3 Déterminer pour chacune des ellipses définies analytiquement suivantes l'équation réduite (ce qu'on appelle aussi la forme canonique de l'équation de la conique), le centre (de symétrie), les demi-axes ainsi que les sommets :

(a) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 24y + 9 = 0$

(b) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$

(c) $5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$

(d) $2x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 6 = 0$

(e) $3x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 8 = 0$

(f) $3x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 24 = 0$

Solution:

(a) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 24y + 9 = 0 \iff \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

Caractéristiques de l'ellipse :

1. Centre : $(1, 3)$.
2. Axes :
   — Demi-axe horizontal $a = 2$.
   — Demi-axe vertical $b = 3$.
3. Sommets :
   — Horizontal : $(1 \pm 2, 3) = (-1, 3)$ et $(3, 3)$.
   — Vertical : $(1, 3 \pm 3) = (1, 0)$ et $(1, 6)$.

(b) $x^2+4y^2-6x+8y-3=0 \iff \frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

Caractéristiques de l'ellipse :

1. Centre : $(3,-1)$.
2. Axes :
   — Demi-axe horizontal $a=4$.
   — Demi-axe vertical $b=2$.
3. Sommets :
   — Horizontal : $(3\pm4,-1)=(-1,-1)$ et $(7,-1)$.
   — Vertical : $(3,-1\pm2)=(3,-3)$ et $(3,1)$.

(c) $5x^2+y^2-10x+4y+4=0 \iff \frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+2)^2}{5}=1$

Caractéristiques de l'ellipse :

1. Centre : $(1,-2)$.
2. Axes :
   — Demi-axe horizontal $a=1$.
   — Demi-axe vertical $b=\sqrt{5}$.
3. Sommets :
   — Horizontal : $(1\pm1,-2)=(0,-2)$ et $(2,-2)$.
   — Vertical : $(1,-2\pm\sqrt{5})\approx(1,-4.24)$ et $(1,0.24)$.

(d) $$\begin{aligned}2x^2+4y^2-4x+8y+6=0 &\iff x^2+2y^2-2x+4y+3=0\\ &\iff x^2-2x+1-1+2(y^2+2y+1)-2+3=0\\ &\iff (x-1)^2+2(y+1)^2=0\end{aligned}$$

C'est une ellipse dégénérée puisqu'elle est réduite à un seul point de coordonnée $(1,-1)$

(e) $3x^2+5y^2-12x+10y+8=0 \iff \frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{\frac{9}{5}}=1$

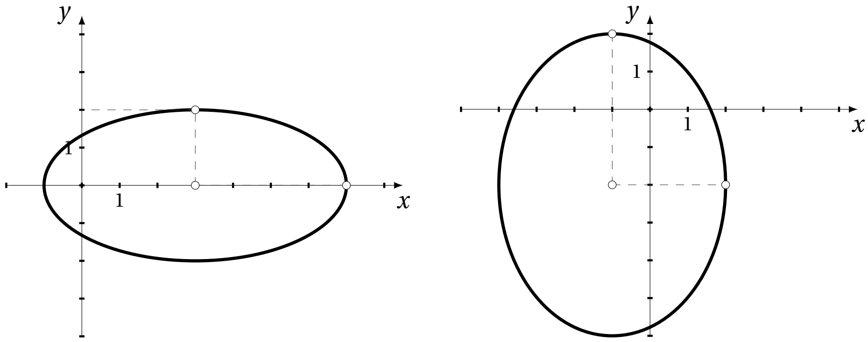
Caractéristiques de l'ellipse :

1. Centre : $(2,-1)$.
2. Axes :
   — Demi-axe horizontal $a=\sqrt{3}$.
   — Demi-axe vertical $b=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\approx1.34$.
3. Longueur des axes :
   — La longueur de l'axe horizontal est $2a=2\times\sqrt{3}\approx3.46$.
   — La longueur de l'axe vertical est $2b=2\times\frac{3}{\sqrt{5}}\approx2.68$.
4. Sommets :
   — Horizontal : $(2\pm\sqrt{3},-1)\approx(2\pm1.732,-1)=(0.268,-1)$ et $(3.732,-1)$.
   — Vertical : $(2,-1\pm\frac{3}{\sqrt{5}})\approx(2,-1\pm1.34)=(2,-2.34)$ et $(2,0.34)$.

(f) $3x^2+5y^2-12x+10y+24=0 \iff 3(x-2)^2+5(y+1)^2=-7$

Cette équation n'est pas possible car une somme de deux termes positifs ne peut pas être négative. Le lieu des points est l'ensemble vide.

4 Pour chacune des ellipses suivantes, indiquer la coordonnée du centre, des sommets, des foyers et des points d'intersection avec les axes du repère cartésien après avoir trouvé les équations cartésiennes pré-réduites et développées.



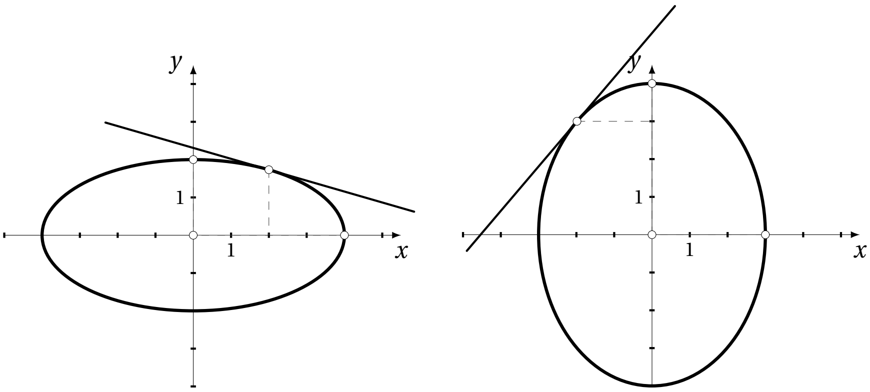
Solution: ellipse de gauche : centre $(3,0)$; sommets : $(7,1)$, $(3,2)$, $(-1,0)$, $(3,-2)$; foyers $\left(3\pm 2\sqrt{3},0\right)$

$\mathscr{E}_1 \equiv \frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ou $\mathscr{E}_1 \equiv x^2-6x+4y^2-7=0$

ellipse de droite : centre $(-1,-2)$; sommets : $(2,-2)$, $(-1,2)$, $(-4,-2)$, $(-1,-6)$; foyers $\left(-1,-2\pm\sqrt{7}\right)$

$\mathscr{E}_2 \equiv \frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$ ou $\mathscr{E}_2 \equiv 16x^2+9y^2+32x+36y-92=0$.

5 Quelle est l'équation cartésienne des tangentes aux ellipses suivantes ?



Solution:

(a) ellipse de droite : $T \equiv x+2\sqrt{3}y-8=0$

(b) ellipse de gauche : $T \equiv 4\sqrt{63}x-27y+144=0$

6 Soit $\Gamma \equiv 5x^2+9y^2-30x-18y+9=0$ l'équation cartésienne d'une conique.

(a) Montre que Γ est une ellipse ayant un demi grand axe de longueur 3, un demi petit axe de longueur $\sqrt{5}$ et le point $O_\Gamma\,(3;1)$ comme centre de symétrie.

(b) Recherche la position des foyers et des sommets de cette conique.

(c) Pourquoi peut-on dire que l'axe des ordonnées est tangente à Γ ? Justifie rapidement.

(d) Si l'équation de Γ' est l'équation réduite de Γ (Γ' est par conséquent une conique "centrée" à l'origine), recherche l'équation cartésienne implicite des tangentes T_1' et T_2' aux points $A_1'\in\Gamma'$ et $A_2'\in\Gamma'$ respectivement les translatés de A_1 et A_2 les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses

(**pour contrôle** : les deux tangentes doivent se couper en $(0;-5)$)

Solution:

(a)
$$\begin{aligned} 5x^2-30x &= 5(x^2-6x) \\ &= 5(x^2-6x+9-9) \\ &= 5((x-3)^2-9) \\ &= 5(x-3)^2-45 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 9y^2-18y &= 9(y^2-2y) \\ &= 9(y^2-2y+1-1) \\ &= 9((y-1)^2-1) \\ &= 9(y-1)^2-9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5(x-3)^2-45+9(y-1)^2-9+9=0 &\iff 5(x-3)^2+9(y-1)^2-45=0 \\ &\iff 5(x-3)^2+9(y-1)^2=45 \\ &\iff \frac{5(x-3)^2}{45}+\frac{9(y-1)^2}{45}=1 \\ &\iff \frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1 \end{aligned}$$

Cette forme correspond à celle d'une ellipse avec les axes centrés en $(3,1)$.

Les termes $\frac{(x-3)^2}{9}$ et $\frac{(y-1)^2}{5}$ indiquent que le demi-grand axe a pour longueur $\sqrt{9}=3$ et le demi-petit axe a pour longueur $\sqrt{5}$.

Donc, Γ est bien une ellipse ayant :
– un demi-grand axe de longueur 3,
– un demi-petit axe de longueur $\sqrt{5}$,
– et le centre de symétrie au point $O_\Gamma(3,1)$.

(b) Les sommets de l'ellipse se trouvent le long des axes.

Les sommets sur l'axe horizontal sont :

$(3+3,1) = (6,1)$
$(3-3,1) = (0,1)$

Les sommets sur l'axe vertical sont :

$(3,1+\sqrt{5})$
$(3,1-\sqrt{5})$

Les foyers de l'ellipse se trouvent à une distance c du centre, le long de l'axe horizontal, où c est défini par : $c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$

Les foyers sont situés à une distance de $c = 2$ le long de l'axe horizontal à partir du centre $(3,1)$:
F1 $(3+2,1) = (5,1)$ F2 $(3-2,1) = (1,1)$

Résumé :
— Les sommets de l'ellipse sont : S1 $(6,1)$, S2 $(0,1)$, S3 $(3,1+\sqrt{5})$ et S4 $(3,1-\sqrt{5})$
— Les foyers de l'ellipse sont F1 : $(5,1)$ et F2 $(1,1)$

(c) car l'intersection de l'ellipse avec l'axe des ordonnées ne correspond qu'à un point, le sommet S2 de coordonnée $(0,1)$.

(d) i. A_1 et A_2 les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses :

$$5x^2+9y^2-30x-18y+9=0 \text{ et } y=0 \text{ ssi } 5x^2-30x+9=0$$

Les solutions sont $x_1 = 3+\frac{6}{5}\sqrt{5}$ et $x_2 = 3-\frac{6}{5}\sqrt{5}$

ii. translation : $A_1' = A_1-(3,1) = \left(\frac{6}{5}\sqrt{5},-1\right)$ et $A_2' = A_2-(3,1) = \left(-\frac{6}{5}\sqrt{5},-1\right)$

iii. $\Gamma \equiv \frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5} = 1 \iff \Gamma' \equiv \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5} = 1$

— tangente en A_1' : $T_1' \equiv \frac{\frac{6}{5}\sqrt{5}x}{9}+\frac{-y}{5} = 1$ ou $2\sqrt{5}x-3y-15=0$

— tangente en A_2' : $T_2' \equiv \frac{-\frac{6}{5}\sqrt{5}x}{9}+\frac{-y}{5} = 1$ ou $2\sqrt{5}x+3y+15=0$

iv. — tangente en A_1 : $T_1 \equiv 2\sqrt{5}(x-3)-3(y-1)-15=0$ ou $2\sqrt{5}x-3y-6\sqrt{5}-12=0$

— tangente en A_2 : $T_2 \equiv 2\sqrt{5}(x-3)+3(y-1)+15=0$ ou $2\sqrt{5}x+3y-6\sqrt{5}+12=0$

De la Géométrie vers l'Algèbre

7 Considérons l'ellipse Γ de foyer $F(2;0)$, de directrice $\Delta \equiv x+1=0$, d'excentricité $e = \frac{1}{2}$

(a) Déterminer les équations focale et (pré-)réduite de Γ

(b) Quelle est l'équation de la tangente à Γ au point de coordonnée $\left(4;-\frac{3}{2}\right)$

Solution:

(a) Équation focale : $P \in \Gamma \iff \overline{PF} = e\cdot\overline{P\Delta}$
A partir de la définition en terme de distance, on a successivement :

$$\begin{aligned}
\overline{PF}^2 = e^2\cdot\overline{P\Delta}^2 \iff (x-2)^2+y^2 = \tfrac{1}{2^2}(x+1)^2 &\iff x^2-4x+4+y^2 = \tfrac{1}{4}\left(x^2+2x+1\right)\\
&\iff 4x^2-16x+16+4y^2 = x^2+2x+1\\
&\iff 3x^2-18x+4y^2+15=0\\
&\iff 3\left(x^2-6x+9\right)^2-27+4y^2+15=0\\
&\iff 3(x-3)^2+4y^2=12\\
&\iff \tfrac{(x-3)^2}{4}+\tfrac{y^2}{3}=1
\end{aligned}$$

C'est une ellipse d'axe focal Ox, de centre $(3;0)$, de demi grand axe horizontal 2 et de demi petit axe vertical $\sqrt{3}$.

(b) $T \equiv x-2y-7=0$

8 On donne l'ellipse Γ de foyer $F(0;1)$, de directrice $\Delta \equiv y=-1$, d'excentricité $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Déterminer :

(a) les équations focale et réduite de Γ.

(b) le centre Ω ainsi que les demi-axes a et b de Γ.

(c) les coordonnées des sommets de Γ.
(d) l'axe focal, la demi-distance focale, la distance centre-directrice et le paramètre de Γ.
(e) par rapport au repère initial, les coordonnées du second foyer F' et de la seconde directrice Δ' de Γ.

Solution:

(a) $\overline{PF} = e \cdot \overline{P\Delta}$:

$$\begin{aligned} x^2+(y-1)^2=\tfrac{1}{3}\left(y+1\right)^2 &\iff x^2+y^2-2y+1-\tfrac{1}{3}y^2-\tfrac{2}{3}y-\tfrac{1}{3}=0 \\ &\iff x^2+\tfrac{2}{3}y^2-\tfrac{8}{3}y+\tfrac{2}{3}=0 \\ &\iff x^2+\tfrac{2}{3}\left(y^2-4y+1\right)=0 \\ &\iff x^2+\tfrac{2}{3}\left(y^2-4y+4-3\right)=0 \\ &\iff x^2+\tfrac{2}{3}\left(y-2\right)^2=2 \\ &\iff \tfrac{x^2}{2}+\tfrac{(y-2)^2}{3}=1 \end{aligned}$$

(b) $\Omega=(0,2)$, demi axe horiz. $a=\sqrt{2}$ et demi axe vertical $b=\sqrt{3}$ (axe focal vertical !)
(c) Sommets : $\left(\sqrt{2},2\right)$, $\left(-\sqrt{2},2\right)$, $\left(0,2+\sqrt{3}\right)$, $\left(0,2-\sqrt{3}\right)$
(d) équation axe focal : $x=0$; demi-distance focale : $c=\sqrt{3-2}=1$

distance centre-directrice : $d(\Omega,\Delta)=\frac{(\sqrt{3})^2}{1}=3$; le paramètre de Γ : $p=\frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$
(e) autre foyer (symétrique de F par rapport au centre de symétrie) : F'$=(0,3)$
autre directrice (symétrique de Δ par rapport au centre de symétrie) : $\Delta'\equiv y=5$

9 Recherche l'équation de la conique Γ étant donné :
— directrices $\Delta_1\equiv 4y-33=0$ et $\Delta_2\equiv 4y+17=0$
— grand axe sur $x+1=0$
— excentricité : $\frac{4}{5}$

Solution: La distance entre les deux directrices vaut 4 $\left(\frac{33}{4}-\frac{17}{4}\right)$.

Comme le centre de la conique se situe sur l'axe d'équation $x=-1$ et est situé à mi-distance des directrices, on en déduit que celui-ci est en $(-1,2)$.

Par ailleurs, l'excentricité de la conique appartient à l'intervalle $]0;1[$, celle-ci est donc une ellipse dont le grand axe est vertical ($a^2=b^2-c^2$).

La distance entre le centre et une directrice vaut $\frac{25}{4}$. On a donc $\frac{b^2}{c}=\frac{25}{4}$. De plus, $\frac{c}{b}=\frac{4}{5}$.

Le système d'équations formé par ces deux équations a pour solutions $c=4$ et $b=5$.

Finalement : $a=\sqrt{25-16}=3$. Solution : $\mathscr{E}\equiv\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

Quelques problèmes inverses

10 Considérons l'ellipse Γ d'équation $3x^2+4y^2-4x-4=0$

(a) Déterminez l'excentricité e, la distance foyer-directrice m, la distance centre-directrice, le paramètre p de Γ.
(b) Déterminez les foyers et les directrices de Γ.

Solution: $3x^2+4y^2-4x-4=0 \iff \frac{(x-\frac{2}{3})^2}{(\frac{4}{3})^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$ (faire un dessin !)

axe focal horizontal : $c=\sqrt{\frac{16}{9}-\frac{12}{9}}=\frac{2}{3}$ $\quad\Omega=\left(\frac{2}{3},0\right)$

(a) excentricité $e=\frac{c}{a}=\frac{2/3}{4/3}=\frac{1}{2}$, distance foyer-directrice $m=\frac{b^2}{c}=\frac{12/9}{2/3}=2$,
distance centre-directrice : $d(\Omega,\Delta)=\frac{a^2}{c}=\frac{8}{3}$, paramètre $p=\frac{b^2}{a}=\frac{12/9}{4/3}=1$.
(b) foyers F$=(0,0)$ F'$=\left(\frac{4}{3},0\right)$, directrices $\Delta\equiv x=\frac{10}{3}$, $\Delta'\equiv x=-2$

11 Même question pour :

(a) $\Gamma_a\equiv 3x^2+4y^2-18x+15=0$

(b) $\Gamma_b \equiv 5x^2 + 9y^2 - 12x - 9 = 0$
(c) $\Gamma_c \equiv 5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$

Solution:

(a) $\Gamma_a \equiv 3x^2 + 4y^2 - 18x + 15 = 0$

i. excentricité $e = \frac{1}{2}$, distance foyer-directrice $m = 3$,
distance centre-directrice : $d(\Omega, \Delta) = 4$, paramètre $p = \frac{3}{2}$.

ii. foyers F= $(2,0)$ F'= $(4,0)$, directrices $\Delta \equiv x = -1$, $\Delta' \equiv x = 7$

(b) $\Gamma_b \equiv 5x^2 + 9y^2 - 12x - 9 = 0$ ou encore $\frac{\left(x-\frac{6}{5}\right)^2}{\left(\frac{9}{5}\right)^2} + \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$

axe focal horizontal : $c = \sqrt{\frac{81}{25} - \frac{9}{5}} = \frac{6}{5}$ $\quad \Omega = \left(\frac{6}{5}, 0\right)$

i. excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, distance foyer-directrice $m = \frac{b^2}{c} = \frac{9/5}{6/5} = \frac{3}{2}$,
distance centre-directrice : $d(\Omega, \Delta) = \frac{a^2}{c} = \frac{27}{10}$, paramètre $p = \frac{b^2}{a} = 1$.

ii. foyers F= $(0,0)$ F'= $\left(\frac{12}{5}, 0\right)$, directrices $\Delta \equiv x = \frac{6}{5} - \frac{27}{10}$, $\Delta' \equiv x = \frac{6}{5} + \frac{27}{10}$

(c) $\Gamma_c \equiv 5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$

i. laissé au lecteur

ii. laissé au lecteur

Définition bifocale d'une ellipse

12 Déterminer une équation cartésienne du lieu géométrique Γ des points du plan dont la somme des distances à deux points fixes F et F' est 10, alors que la distance des deux points est 8.

Solution:

13 Un jardinier souhaite créer un parterre de forme elliptique dont la plus grande dimension est 20 m et la plus petite 10 m.

(a) Il plante dans le sol en F et F 0 deux piquets fixes. Quelle distance doit séparer ces deux piquets pour obtenir l'ellipse proposée ?

(b) Il plante en M un piquet mobile. Il fixe les extrémités d'une corde en F et F 0 et il la fait passer par M . Quelle doit être la longueur de cette corde pour obtenir le tracé elliptique demandé ?

Solution:

14 Un pont de forme elliptique est situé au-dessus d'une route. Sa largeur à la base est de 8m et sa hauteur de 3m. Un transport extraordinaire a une hauteur de 2m50. Quelle est la largeur maximale de ce convoi pour qu'il puisse passer sous le pont ?

Solution: