# Équations de droites dans l'espace

Il n'existe pas d'équation cartésienne d'une droite dans l'espace.

Soit la droite $d$ passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques des droites dans l'espace sont les mêmes que dans le plan, sauf qu'il y a une coordonnée en plus : $z$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\, x_v, \\ y = y_0 + \lambda\, y_v, \\ z = z_0 + \lambda\, z_v, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

# Équations de plans dans l'espace

## Équation paramétrique d'un plan

Un plan dans l'espace peut être défini par un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et deux vecteurs directeurs non colinéaires

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

L'équation paramétrique du plan est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\, u_x + \mu\, v_x, \\ y = y_0 + \lambda\, u_y + \mu\, v_y, \\ z = z_0 + \lambda\, u_z + \mu\, v_z, \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

## Équation cartésienne d'un plan

Un plan peut également être défini par une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où $a$, $b$, et $c$ sont les composantes d'un vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ au plan, et $d$ est une constante.

## Conversion entre équation paramétrique et cartésienne

Pour convertir une équation paramétrique en équation cartésienne, on peut utiliser le produit vectoriel des vecteurs directeurs pour obtenir un vecteur normal au plan. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs directeurs, alors le vecteur normal $\vec{n}$ est donné par :

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Ensuite, on utilise le point $A(x_0, y_0, z_0)$ pour déterminer la constante $d$ dans l'équation cartésienne.

## Exemple

Supposons que nous ayons un plan défini par le point $A(1,2,3)$ et les vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Calculons le vecteur normal $\vec{n}$ :

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = \mathbf{i}(0\cdot 1 - 1\cdot 1) - \mathbf{j}(1\cdot 1 - 1\cdot 0) + \mathbf{k}(1\cdot 1 - 0\cdot 0) = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

   Donc, $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

2. L'équation cartésienne du plan est de la forme :

$$-1\cdot x - 1\cdot y + 1\cdot z + d = 0$$

3. Utilisons le point $A(1,2,3)$ pour trouver $d$ :

$$-1\cdot 1 - 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + d = 0 \implies -1 - 2 + 3 + d = 0 \implies d = 0$$

   Donc, l'équation cartésienne du plan est :

$$-x - y + z = 0$$

## Position relative entre une droite et un plan

— **La droite est contenue dans le plan** si son vecteur directeur est dans le plan et qu'elle passe par un point du plan.
— **La droite est parallèle au plan** si son vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal du plan, sans point commun.
— **La droite est sécante au plan** si elle possède un unique point d'intersection avec le plan.

## Angle entre deux plans

Si les plans ont pour vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, alors :

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$$

## Intersection de deux plans

— **Parallèles** : leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
— **Confondus** : équations identiques.
— **Sécants** : les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires. L'intersection est une droite.

# Liste d'exercices

**1** Soit la droite $d$ passant par les points $A(1;-2;5)$ et $B(-3;6;1)$.
   (a) Déterminez deux vecteurs directeurs de cette droite.
   (b) Déterminez deux autres points de cette droite.

**2** Soit la droite $d$ :

$$\begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = 2\lambda \\ z = -5\lambda + 2 \end{cases}$$

   Donnez deux autres représentations paramétriques de cette droite.

**3** Une droite $d$ est définie par un point $A(2;4;5)$ et un vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$.

(a) Écrivez un système d'équations paramétriques de $d$.

(b) Vérifiez si le point $P(7;-1;3)$ appartient à la droite $d$.

**4** Soit le point $A(2;0;-3)$. Écrivez une représentation paramétrique des droites suivantes :

(a) $d_1$ passant par $A$ et $B(1;4;5)$.

(b) $d_2$ passant par $A$ et parallèle à la droite $g$ :

$$\begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = 3\lambda \\ z = 5\lambda + 2 \end{cases}$$

(c) $d_3$ passant par $A$ et parallèle à l'axe des $y$.

**5** Soit $d_1 \equiv \begin{cases} x = r+1 \\ y = -r+2 \\ z = 2r-1 \end{cases}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} x = -s+1 \\ y = s-2 \\ z = 2s \end{cases}$

(a) Déterminer la perpendiculaire commune entre deux droites données.

(b) Déterminer la distance entre deux droites données.

(c) Déterminer les points les plus proches de deux droites donnés.

**Solution:**

(a) $p \equiv \begin{cases} x = 1/4 + h \\ y = -5/4 + h \\ z = 3/2 \end{cases}$ ou $p \equiv \begin{cases} x - y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$

(b) $d\,(d_1, d_2) = 2\sqrt{2}$

(c) soit $R \in d_1$ et $Q \in d_2$, alors

$$\begin{cases} R = \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right) \\ Q = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

**6** L'espace est muni d'un système d'axes orthonormés Oxyz. Soit $A$, le point de coordonnées $(1,3,\alpha)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre variable, et soit $d$ la droite d'équations cartésiennes

$$d \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

(a) Donnez les équations cartésiennes de la droite $d' = OA$

(b) Existe-t-il une valeur de $\alpha$ pour laquelle $d$ et $d'$ sont sécantes ? Si oui, déterminez l'intersection $P$ de ces droites pour cette valeur.

(c) Existe-t-il une valeur de $\alpha$ pour laquelle $d$ et $d'$ sont orthogonales ? Si oui, déterminez cette valeur.

(d) Existe-t-il une valeur de $\alpha$ pour laquelle $d$ et $d'$ sont parallèles ? Si oui, déterminez cette valeur.

(e) On fixe maintenant $\alpha = 1$. Déterminez les équations cartésiennes des plans $\pi$ et $\pi'$ tels que $d \subset \pi$, $d' \subset \pi'$ et $\pi \parallel \pi'$

**Solution:**

(a) $d' \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{\alpha}$, ou bien :

$$d' \equiv \begin{cases} x = h \\ y = 3h \\ z = \alpha h \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{v_{d'}} = (1,3,\alpha)$$

(b) $\alpha = 4/3$ et $P = (3,9,4)$

(c) $\alpha = -7$

(d) impossible

(e) $\pi \equiv -x + z - 1 = 0$ et $\pi \equiv -x + z = 0$