

Nom, Prénom : _____ CLASSE : _____

Instructions : Utilise une ou plusieurs feuilles A4 pour répondre à ce questionnaire.

- Pour chaque question à choix multiples, une ou plusieurs affirmations peuvent être correctes.
- Aucune justification n'est requise.
- Indique les lettres correspondant à toutes les affirmations correctes pour chaque question (n'oublie pas de bien les numéroter).
- La dernière question est une question ouverte et nécessite un raisonnement.
- Tu dois rendre ce questionnaire avec tes solutions.

1 Laquelle de ces variables est une variable aléatoire continue?

- A. Le nombre de femmes mesurant plus de 172 centimètres dans un échantillon aléatoire de 5 femmes.
- B. Le nombre de bonnes réponses données au hasard à un QCM.
- C. Le temps qu'un étudiant pris au hasard met pour terminer un examen.**
- D. Le nombre de tatouages qu'une personne choisie au hasard possède.

Solution: Une variable aléatoire continue est une variable qui peut prendre une infinité de valeurs non dénombrables dans un intervalle donné. Le temps est une mesure continue car il peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle de temps donné (par exemple, un étudiant peut mettre 45 minutes et 30,5 secondes pour terminer un examen).

Les autres options décrivent des variables aléatoires discrètes, car elles prennent des valeurs dénombrables :

- Le nombre de femmes mesurant plus de 172 centimètres dans un échantillon aléatoire de 5 femmes.
- Le nombre de bonnes réponses données au hasard à un QCM.
- Le nombre de tatouages qu'une personne choisie au hasard possède.

Ces variables ne peuvent prendre que des valeurs entières et dénombrables.

2 Les rythmes cardiaques des hommes adultes suivent approximativement une loi normale de moyenne 70 et d'écart-type 8. Quelle option décrit correctement comment trouver la proportion d'hommes ayant un rythme cardiaque supérieur à 78?

- A. Trouver l'aire à droite de $z = 1$ sous la courbe normale centrée réduite.**
- B. Trouver l'aire à gauche de $z = -1$ sous la courbe normale centrée réduite.**
- C. Trouver l'aire à gauche de $z = 1$ sous la courbe normale centrée réduite.
- D. Trouver l'aire entre $z = -1$ et $z = 1$ sous la courbe normale centrée réduite.

Solution: Pour déterminer la proportion d'hommes ayant un rythme cardiaque supérieur à 78, nous devons d'abord standardiser la valeur 78 en utilisant la formule $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ où $X = 78$, $\mu = 70$, et $\sigma = 8$.

On a $Z = \frac{78 - 70}{8} = 1$ et $P(X \geq 78) = P(Z \geq 1)$

Cela correspond à l'aire sous la courbe normale centrée réduite à droite de $z = 1$.

3 On considère une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(20; 0,2)$.

- A. $P(Y = 5) \approx 0,1746$**
- B. $E(Y) = 4$**
- C. $\sigma(Y) = 3,2$

D. $P(Y > 1) = 1 - P(Y = 0)$

Solution:

- (a) VRAI Justification : Calculé en utilisant la formule de la loi binomiale $P(Y = 5) = C_{20}^5 (0,2)^5 (0,8)^{15} \approx 0,1746$
- (b) VRAI Justification : L'espérance d'une variable aléatoire binomiale est donnée par $E(Y) = n \times p = 20 \times 0,2 = 4$
- (c) FAUX Correction : L'écart-type est $\sigma(Y) = \sqrt{n \times p \times (1 - p)} = \sqrt{20 \times 0,2 \times 0,8} = \sqrt{3,2} \approx 1,79$
- (d) FAUX Correction : $P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)]$.)

4 La variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite. Soit $Y = 2Z + 3$.

- A. $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma = 4)$
- B. $P(Y < 2) = 0,5$
- C. $P(Y < 5) = P(Z < 1)$
- D. $P(1 \leq Y \leq 5) = 2P(Z < 1) - 1$

Solution:

- (a) FAUX Correction : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma = 2)$
- (b) FAUX Correction : $P(Y < 2) = P\left(Z < \frac{2-3}{2}\right) = P(Z < -0,5) \approx 0,3085$
- (c) VRAI Justification : $P(Y < 5) = P(2Z + 3 < 5) = P(Z < 1)$
- (d) VRAI Justification : $P(1 \leq Y \leq 5) = P\left(\frac{1-3}{2} \leq Z \leq \frac{5-3}{2}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(Z < 1) - 1$

5 Les temps d'arrivée des coureurs d'un marathon suivent une loi normale de moyenne 200 minutes et d'écart-type 30 minutes.

- (a) (2 points) Quelle est la probabilité qu'un coureur termine le marathon en moins de 3 heures?

Solution: 3 heures = 180 minutes. On standardise :

$$Z = \frac{180 - 200}{30} = \frac{-20}{30} = -\frac{2}{3} \approx -0,67$$

À l'aide de la table de la loi normale, on trouve :

$$P(X < 180) = P(Z < -0,67) \approx 0,2514$$

Donc environ 25,14 % des coureurs terminent en moins de 3 heures.

- (b) (2 points) Calculer le temps à partir duquel les 10 % des premiers coureurs ont terminé le marathon.

Solution: On cherche x tel que :

$$P(X < x) = 0,10 \Rightarrow P(Z < z) = 0,10 \Rightarrow z \approx -1,28$$

On déstandardise :

$$x = \mu + z\sigma = 200 + (-1,28) \cdot 30 = 200 - 38,4 = 161,6$$

Donc environ 161,6 minutes (soit 2 h 41 min) pour les 10 % plus rapides.