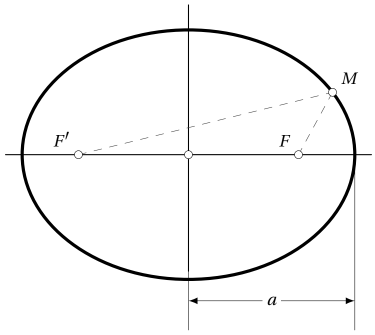
1 L'ellipse

1.1 Définition bifocale – L'ellipse du jardinier

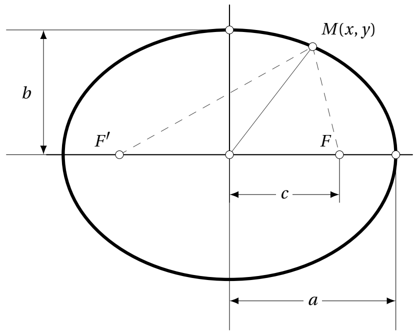


On peut définir une ellipse comme étant le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes, dits foyers, est constante. Sa construction est simple via la méthode du jardinier.
Soit deux points F et F' du plan et a un réel strictement positif. L'ensemble $\mathbb{E}$ des points du plan M vérifiant

$$\mathbb{E} \equiv \overline{MF} + \overline{MF'} = 2a$$

est une ellipse. Les points F et F' sont appelés les foyers de l'ellipse. La droite FF' est la droite (ou axe) focale.

1.2 Equation cartésienne



Soit deux réels a et c vérifiant $0 < c < a$. Si $F = (c;0)$ et $F' = (-c;0)$ alors : $\mathbb{E} \equiv \overline{MF} + \overline{MF'} = 2a \iff \mathbb{E} \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$

Une ellipse est aussi définie par l'équation suivante :

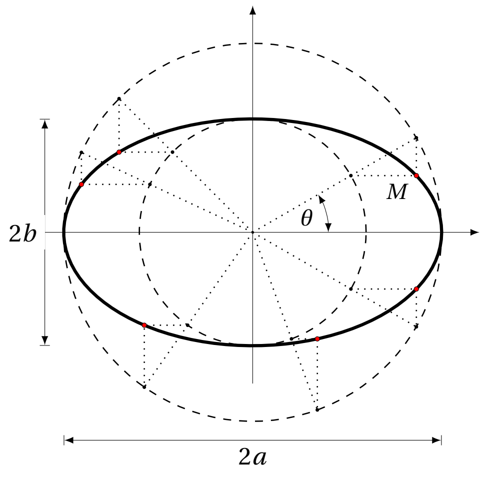
$$b^2\ x^2 + a^2\ y^2 = a^2\ b^2 \text{ avec } a^2 = b^2 + c^2$$

Comme $a > b$, a est appelé le **demi grand axe**, et b le **demi petit axe**.

1.3 Image d'un cercle par une affinité orthogonale

L'ellipse de représentation paramétrique $\begin{cases} x(\theta) = a\cos(\theta) \\ y(\theta) = b\sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0;2\pi]$

dans un repère cartésien est l'image du cercle de centre O et de rayon a par l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport b/a. Ce cercle est appelé cercle principal de l'ellipse.



1.4 Symétrie / Translation

Si $A(x_A; y_A)$ est le centre de symétrie de l'ellipse et $d_{FF'} \parallel Ox$ alors

$$\mathbb{E} \equiv \frac{(x-x_A)^2}{a^2} + \frac{(y-y_A)^2}{b^2} = 1 \text{ ou } \mathbb{E} \equiv \begin{cases} x(\theta) = x_A + a\cos(\theta) \\ y(\theta) = y_A + b\sin(\theta) \end{cases}$$

1.5 Directrice - Foyer

Soit F un point du plan, Δ une droite ne passant pas par F et un nombre réel $e \in]0,1[$.

On appelle ellipse de foyer F, de directrice Δ et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan vérifiant :

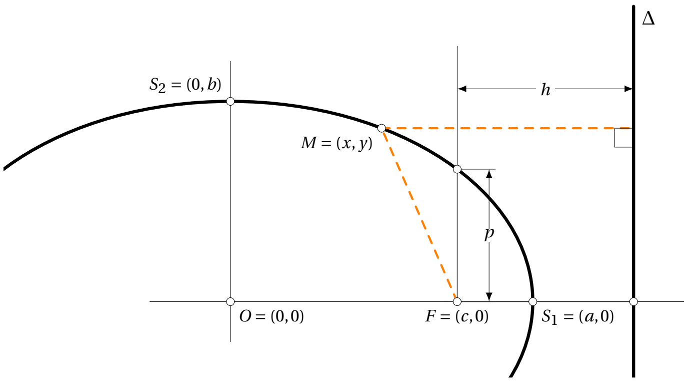
$$\mathbb{E} \equiv \mathbf{d}(M;F) = e \cdot \mathbf{d}(M;\Delta) \qquad e \in]0;1[$$

Dans un repère orthonormé, si $e = \frac{c}{a}$ et $\Delta \equiv x = \frac{a^2}{c}$ alors : $\quad \mathbf{d}(M;F) = e \cdot \mathbf{d}(M;\Delta) \iff \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

1.6 De la géométrie à l'algèbre

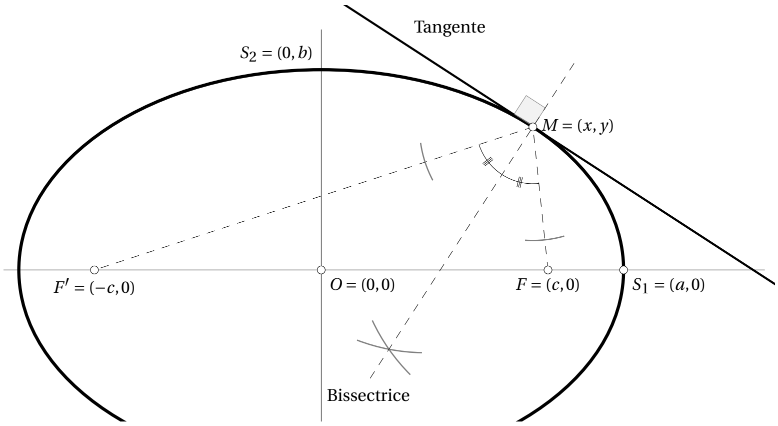
Données : $a = 4$, $c = 3$ $\qquad \Gamma \equiv \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{excentricité : } e = \frac{c}{a} = 0,75 \\ \text{petit axe : } b = \sqrt{a^2 - c^2} \approx 2,646 \\ \text{directrice : } \Delta \equiv x = \frac{a^2}{c} \approx 5,333 \\ \text{distance foyer-directrice : } h = \frac{b^2}{c} \approx 2,333 \\ \text{paramètre : } p = \frac{b^2}{a} = 1,75 \end{cases}$$



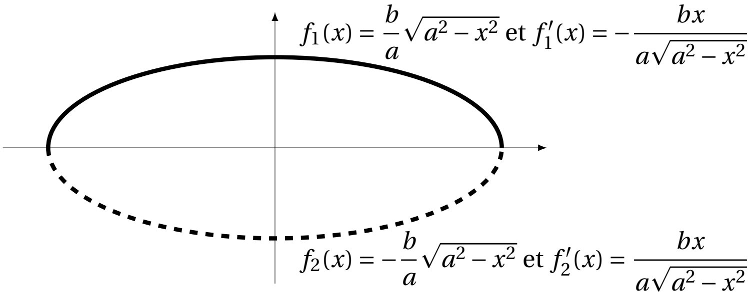
1.7 Tangente et bissectrice

Equation cartésienne de la tangente T_M à l'ellipse $\mathbb{E}$ en $M \in \mathbb{E}$: $\quad T_M \equiv \dfrac{x_M \cdot x}{a^2} + \dfrac{y_M \cdot y}{b^2} = 1$



La bissectrice du secteur angulaire formé par les droites reliant un point de l'ellipse aux foyers est perpendiculaire à la tangente en ce point.

1.8 En terme de fonctions



2 L'hyperbole

On appellera hyperbole de foyers F, F' l'ensemble des points dont la valeur absolue de la différence des distances à F et à F' est égale à $2a$ avec $a > 0$.

Soit deux points F et F' du plan et a un réel strictement positif. L'ensemble $\mathbb{H}$ des points du plan M vérifiant

$$\mathbb{E} \equiv \left|\overline{MF} - \overline{MF'}\right| = 2a$$

est une Hyperbole. Les points F et F' sont appelés les foyers de l'ellipse. La droite FF' est la droite (ou axe) focale.

2.1 Equation cartésienne

Soit deux réels a et c vérifiant $0 < a < c$. Si $F = (c;0)$ et $F' = (-c;0)$ alors :

$$\mathbb{H} \equiv \left|\overline{MF} - \overline{MF'}\right| = 2a \iff \mathbb{H} \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \text{ où } M = (x; y) \in \mathbb{H}$$

Remarque : l'origine des axes est le centre de symétrie de cette conique.

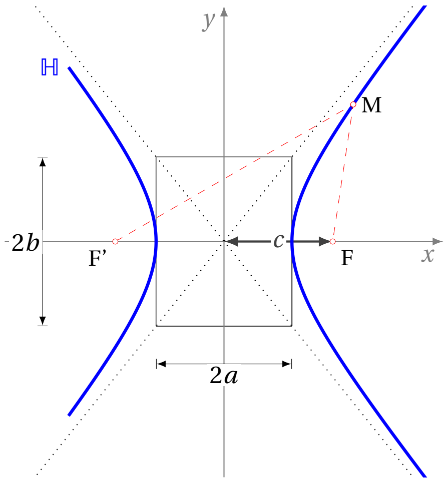


FIGURE 1 – L'hyperbole

Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = c^2 - a^2$.

L'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ admet deux asymptotes d'équation $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$

2.2 Système d'équations paramétriques

$$\mathbb{H} \equiv \begin{cases} x(\theta) = \dfrac{a}{\cos(\theta)} \\ y(\theta) = b\tan(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$$

2.3 Symétrie / Translation

— Lorsque les foyers sont situés sur l'axe des ordonnées, c'est-à-dire $F = (0; c)$ et $F' = (0; -c)$, on a :

$$\mathbb{H} \equiv \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ avec } b^2 = c^2 - a^2$$

— Si $A\left(x_A; y_A\right)$ est le centre de symétrie de l'hyperbole alors

$$\mathbb{H} \equiv \frac{(x - x_A)^2}{a^2} - \frac{(y - y_A)^2}{b^2} = 1 \text{ ou } \mathbb{H} \equiv \begin{cases} x(\theta) = x_A + \dfrac{a}{\cos(\theta)} \\ y(\theta) = y_A + b\tan(\theta) \end{cases}$$