PREMIÈRE PARTIE	Lundi **16/06** – Début : **08h30** – Fin : **11h30**

CONSIGNES

- Chaque feuille à en-tête doit comporter votre nom, prénom et numéro d'ordre.
- Numérotez vos feuilles à en-tête dans le coin supérieur droit.
- *Les feuilles de brouillon ne seront pas remises avec la copie.*
- Cette première partie comporte 7 questions.

Barème des compétences : **(C2)** = 20 Pts **(C3)** = 13 Pts Total = 33 Pts

C2 : Appliquer une procédure

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(a) $\log_8(x-5)+\log_8(x+2)=1$ .../3

(b) $\mathbf{e}^{2x}-5\,\mathbf{e}^{x}+6=0$ .../3

Solution:

(a) CE : $x>5$

$$\begin{aligned}\log_8(x-5)+\log_8(x+2)=1 &\iff \log_8\left((x-5)(x+2)\right)=1\\ &\iff (x-5)(x+2)=8^1\\ &\iff x^2-3x-18=0\end{aligned}$$

$$\boxed{S=\{6\}}$$

(b) Posons $y=\mathbf{e}^x$. On a alors $y^2-5y+6=0$, soit $(y-2)(y-3)=0$ donc $y=2$ ou $y=3$. Donc $x=\ln 2$ ou $x=\ln 3$.

$$\boxed{S=\{\ln 2;\ln 3\}}$$

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

(a) Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$. .../2

(b) Étudier les variations de la fonction f. .../3

Solution: CE : $x>0$ et $x\neq 1$

(a) 1. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{\ln(1^+)}=\frac{1}{0^+}=\boxed{+\infty}$

inutile de calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\ln x}$ car **dom** $f=]1\,;\,+\infty[$

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x=\boxed{+\infty}$

(b) $\boxed{f'(x)=\dfrac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}}$ avec **dom** $f'=]1\,;\,+\infty[$

x	1		e		$+\infty$
f'	$\Vert$ $-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Minimum global en $(\mathrm{e};\mathrm{e})$

3 Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int x\cdot\mathbf{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ …/2

Solution: U-subst. $u=-x^2$

$$\int x\cdot\mathbf{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\boxed{-\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}+C}$$

(b) $\displaystyle\int_1^{\mathbf{e}} x\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$ …/2

Solution: Intégration par partie :

$$\begin{aligned}\int x\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x&=\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\\&=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}+C\\&=\boxed{\frac{x^2}{4}\big(2\ln(x)-1\big)+C}\end{aligned}$$

Résultat final

$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} x\cdot\ln(x)\,dx=\frac{1+\mathrm{e}^2}{4}}$$

(c) $\displaystyle\int\frac{3}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x$ …/2

Solution: $\displaystyle\int\frac{3}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x=\boxed{\ln|x|-\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)+C}$

4 Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par le graphe des fonctions …/3

$$f(x)=-x^2+6x-5\quad\text{et}\quad g(x)=x^2-4x+3$$

Solution: Réponse finale : A$=\displaystyle\int_1^4 f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^4 -2x^2+10x-8\,\mathrm{d}x=9$

C3 : Résoudre un problème

5 Quand un chasseur tire sur un lapin sans défense, il le touche une fois sur dix. Si dix chasseurs tirent indépendamment sur le même lapin :

(a) Quelle est la probabilité que le lapin conserve l'étanchéité de sa fourrure (c'est-à-dire qu'il ne soit touché par aucun tir) ? .../2

(b) Quelle est la probabilité qu'il soit immangeable, c'est-à-dire qu'il ait été touché au moins deux fois ? .../2

Les résultats seront donnés **au millième près**.

Solution:

— $\mathrm{P}(X=0)=\binom{10}{0}\cdot 0,1^0\cdot 0,9^{10}=0,349$

— Pour $\mathrm{P}(X\geq 2)$, on utilise la complémentaire :

$$\mathrm{P}(X\geq 2)=1-\mathrm{P}(X=0)-\mathrm{P}(X=1)$$

En calculant :

$$\mathrm{P}(X=1)=\binom{10}{1}\cdot 0,1\cdot 0,9^9=0,387$$

Donc :

$$\mathrm{P}(X\geq 2)=1-0,349-0,3874=0,264$$

6 Une ellipse est centrée au point $C(2,1)$, et ses deux foyers sont situés en $F(2,3)$ et $F'(2,-1)$. Cette ellipse est tangente à l'axe des ordonnées.

Un schéma représentant la situation doit être réalisé.

(a) Déterminer l'équation cartésienne développée de cette ellipse. .../2

Solution: Foyers sur une droite verticale (même abscisse) : l'ellipse est verticale

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

avec $a>b$ et ici a lié à l'axe vertical.

— Centre $C(h,k)=(2,1)$, donc $\frac{(x-2)^2}{b^2}+\frac{(y-1)^2}{a^2}=1$

— La distance entre les deux foyers vaut 4 : $c=2$

— la distance entre le centre et le point de tangence est égale au demi-petit axe (horizontal) : $b=2$

— $a^2=b^2+c^2 \implies a^2=8$

Équation canonique

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{8}=1$$

Équation cartésienne développée

$$\boxed{2x^2+y^2-8x-2y+1=0}$$

(b) i. Calculer les points d'intersection de cette ellipse avec l'axe des abscisses. .../1

Solution: L'ellipse coupe l'axe des abscisses en deux points :

$$P_1 = \left(\frac{4-\sqrt{14}}{2}, 0 \right) \quad \text{et} \quad P_2 = \left(\frac{4+\sqrt{14}}{2}, 0 \right)$$

ii. Parmi ces points, déterminer celui où la tangente à l'ellipse présente une pente positive, puis trouver l'équation de cette tangente. .../2

Solution: Via le schéma : le point P_2 est le point par lequel passe une tangente de pente positive.

Équation de la tangente à l'ellipse en P_2

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{4+\sqrt{14}}{2}-2\right)(x-2)}{4} + \frac{(0-1)(y-1)}{8} = 1 &\iff \frac{\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)(x-2)}{4} + \frac{(-1)(y-1)}{8} = 1 \\ &\iff \frac{\sqrt{14}}{8}(x-2) - \frac{1}{8}(y-1) = 1 \\ &\iff \sqrt{14}(x-2) - (y-1) = 8 \\ &\iff y = \sqrt{14}x - 2\sqrt{14} - 7 \end{aligned}$$

7 La taille moyenne de 500 élèves d'une école est de 151 cm, avec un écart-type de 15 cm. En supposant que la taille soit distribuée normalement, déterminer combien d'élèves ont une taille comprise entre 120 cm et 155 cm. .../4

Une table de la loi normale centrée réduite est disponible à la page suivante.

Solution: La *v.a.* X mesure la taille moyenne des élèves et elle suit une loi normale de paramètres $m = 151$ et $\sigma = 15$:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(151\,;\,15)$$

On recherche dans un premier temps $P[120 \le X \le 155]$

$$\begin{aligned} P[120 \le X \le 155] &= P[-2,07 \le Z \le 0,27] \\ &= P[Z \le 0,27] - (1 - P[Z \le 2,07]) \\ &= 0,6064 - 1 + 0,9808 = 0,5872 \end{aligned}$$

Deuxième temps : on multiplie cette probabilité par le nombre total d'élèves pour estimer le nombre N de ceux-ci ayant une taille comprise entre 120 et 155 cm.

$$\boxed{N = 293.6 \approx 294}$$

Intégrale $\pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

$$\pi(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad \pi(-t) = 1 - \pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000