Table des matières

1 Variable aléatoire discrète et loi de probabilité

Une variable aléatoire est une fonction qui associe des nombres à des événements aléatoires.

$$X : \Omega \to \mathbb{R} ; \omega \mapsto X(\omega)$$

Une *variable aléatoire discrète* est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs entières, en nombre fini ou dénombrable.
Associer à chacune des valeurs possibles de la variable aléatoire la probabilité qui lui correspond, c'est définir la *loi de probabilité* ou la *distribution de probabilité* de la variable aléatoire.
La fonction de densité discrète f est la fonction de $\mathbb{R} \to [0,1]$ qui à tout nombre réel x_i associe

$$f(x_i) = \mathrm{P}(X = x_i)$$

On a bien sûr $\sum f(x_i) = 1$.
□ **Exemple** : On jette deux fois une pièce de monnaie non truquée, et on s'intéresse au nombre de fois que le côté "face" a été obtenu. Pour calculer les probabilités des divers résultats, on introduira une variable X qui désignera le nombre de "face" obtenu. X peut prendre les valeurs 0,1,2.
Le tableau suivant représente la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui s'intéresse au nombre de fois que le côté "face" a été obtenu :

x	0	1	2	total
$f(x) = \mathrm{P}(X = x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la fonction qui exprime la probabilité correspondant à chacune des valeurs que cette variable peut prendre.

1.1 Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète

1.1.1 Espérance

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité P est donnée par le tableau :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

On appelle espérance mathématique de X le nombre réel :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X = x_i)\ x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots\ldots + p_n x_n$$

Si on renouvelle un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la moyenne des résultats obtenus se rapproche de l'espérance mathématique.
Une personne qui répète un jeu un grand nombre de fois sera perdant si l'espérance est négative et sera gagnant si elle est positive. Le jeu est dit équitable si l'espérance de gain est nulle.
□ **Exemple** : Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé non pipé et considérons le jeu suivant :

- si le joueur obtient un "6", il gagne 5 €
- s'il obtient un nombre pair autre que "6", il gagne 1 €
- par contre, s'il obtient un point impair, il perd 2 €

L'ensemble des résultats élémentaires $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et on note X le gain ou la perte : $X = \{-2; 1; 5\}$
On associe à chaque événement élémentaire une valeur de X :

$A \subset \Omega$	$\{1,3,5\}$	$\{2,4\}$	$\{6\}$
x_i	-2	1	5
$\mathrm{P}(X = x_i) = p_i$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Il gagne donc en moyenne :

$$\frac{3 \times (-2) + 2 \times 1 + 1 \times 5}{6} = \frac{1}{6}\ €$$

L'espérance du gain est positive, le jeu est donc favorable au joueur.

1.1.2 Variance et Ecart-type

On appelle variance de X le nombre $V(X)$ défini par : $V(X) = \sum (x - \mathbf{E}(X))^2 \cdot \mathrm{P}(X = x)$
Cette formule étant d'usage difficile, on lui préfère la suivante qui sera admise : $V(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$
La variance mesure la dispersion des valeurs de X autour de l'espérance $\mathbf{E}(X)$. On dit que la variance mesure le risque.
Remarque : $\mathbf{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$
On appelle écart type de X le nombre noté σ_X ou $\sigma(X)$ égal à la racine carrée de la variance : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

— A la différence de la variance, l'écart type et les valeurs de X ont le même ordre de grandeur.
— Répartition des notes d'une classe : plus l'écart type est faible, plus la classe est homogène (la note des élèves est proche de la moyenne).

1.1.3 Propriétés

— Quand l'espérance de X est nulle et que l'écart type est égal à 1, on dit que la variable aléatoire X est centrée et réduite .
— Si une nouvelle variable aléatoire Y est définie par $Y = aX + b$, on admet que :

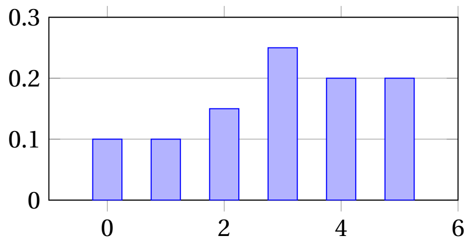
$$\mathbf{E}(Y) = a \cdot \mathbf{E}(X) + b \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y) = a^2 \cdot \mathbf{V}(X)$$

— Si X est une variable aléatoire d'expérance mathématique $\mathbf{E}(X) = \mu$ et d'écart type non nul σ, alors la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est centrée et réduite.

1.2 Exercices

1° On tire au hasard deux cartes d'un jeu de 32 cartes (sans remise).
On considère la variable aléatoire X égale au nombre de cœurs parmi ces deux cartes (on rappelle qu'un quart des cartes sont des cœurs).
(a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
(b) Quelle est l'espérance de X ?

2° Un professionnel vend des fauteuils. Sa commission est de 200 € par fauteuils vendu, et ses frais sont de 280 € par jour. Un étude statistique a montré que la variable aléatoire X qui indique le nombre x de fauteuils vendus par jour suit la loi représentée ci-après. On note Y la variable aléatoire donnant le gain journalier du vendeur.



(a) Quelle est la relation entre X et Y ?
(b) A quelles conditions le vendeur est-il en déficit à la fin de la journée ?
(c) Calculer la probabilité que le vendeur soit en déficit à la fin de la journée.
(d) Quel gain peut-il espérer obtenir en fin de journée ?

3° **Pour une mise de 5 euros**, des billets de loterie permettent de gagner différentes sommes avec leurs probabilités données dans le tableau suivant :

somme gagnée	0	5	100	1000
probabilité	0,911	0,06	0,027	0,002

Ce jeu est-il équitable, défavorable ou favorable au joueur ? Justifie mathématiquement.

4° Un musée propose à la vente trois sortes de billets : un billet à 9 € pour visiter uniquement les collections permanentes; un billet à 11 € pour visiter uniquement l'exposition temporaire ou un billet à 13 € pour visiter les collections permanentes et l'exposition temporaire. On sait que :

— 60% des visiteurs visitent l'exposition temporaire.

— 45% des visiteurs achètent un billet à 11 €.

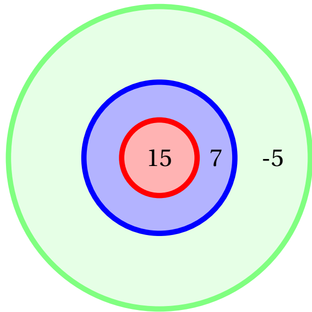
(a) Établir la loi de probabilité associée au prix d'un billet.

(b) Quelle est la recette quotidienne que peut espérer ce musée si le nombre de visiteurs par jour est en moyenne de 20 000?

5° Henri revient d'Angleterre. Il a dans sa poche 2 pièces d'une livre, 3 pièces d'un euro et une pièce de deux euros. De retour à Bruxelles, il sort 2 pièces au hasard de sa poche pour payer une boisson. Etablir la loi de probabilité de la **somme en euros** qu'il sort de sa poche. La boisson coûte 2,5 euros, peut-il espérer la payer sans devoir aller rechercher une autre pièce dans sa poche?

6° Dans un jeu de fléchettes, la cible est constituée de disques de rayons respectifs 5,10 et 20 cm.

Un joueur atteint toujours la cible et on admet que la probabilité qu'il atteigne une zone de cette cible est proportionnelle à l'aire de cette zone. Lorsqu'il atteint la zone rouge, il gagne 15 €, lorsqu'il atteint la couronne bleue, il gagne 7 €. En revanche si la fléchette atteint la couronne verte, il perd 5 €.



On appelle X la variable aléatoire qui indique le gain du joueur.

(a) Déterminer la loi de probabilité de

(b) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur?

(c) Calculer la variance et l'écart type de X

Même question mais la probabilité que le joueur rate la cible est égale à 0,1.

7° Un bac contient 6 roses rouges, coûtant 3 € et 4 roses jaunes, coûtant 4 €. Un client achète 3 roses qu'il sort au hasard de ce bac. On considère la variable aléatoire X désignant le prix total des trois roses.

1. Calculer la probabilité de choisir deux roses jaunes et une rouge.
2. Calculer la probabilité de payer 10 €.
3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

1.3 Loi binomiale

1.3.1 Epreuve de Bernoulli et loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles : un Succès (S) ou un Echec (E)

— La probabilité d'un succès est notée p

— La probabilité d'un échec est notée q

Une variable aléatoire de Bernoulli est une variable aléatoire qui associe la valeur 1 à un succès avec la probabilité p et la valeur 0 à un échec avec la probabilité $1-p$.

On appelle loi de Bernoulli de paramètre p la loi de probabilité de la variable aléatoire de Bernoulli X de paramètre p.

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire de Bernoulli X de paramètre p est

$$\mathbf{E}(X) = p$$

Rappel : L'espérance (mathématique) d'une variable aléatoire numérique X est la valeur que l'on peut espérer obtenir, en moyenne, en réalisant X.

La variance d'une variable aléatoire de Bernoulli X de paramètre p est

$$V(X) = pq$$

Rappel : La variance indique de quelle manière la variable aléatoire se disperse autour de son espérance (sa moyenne).

1.3.2 Loi binomiale de paramètre n et p

Une loi binomiale modélise les expériences aléatoires obtenues à partir d'une répétition d'expériences identiques soumises à un succès ou à un échec.

- Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes
- On s'intéresse au nombre de Succès dans la liste des résultats obtenus à la fin des n épreuves.

Tirages indépendants signifie qu'un tirage soit réussi ou non n'a pas d'influence sur le fait que le suivant soit réussi ou non : c'est pour cela que les probabilités (conditionnelles) de réussite ou d'échec sur toutes les branches d'un arbre probabiliste sont les mêmes.
A chaque liste de n résultats de la variable aléatoire X, on associe la nombre k de succès.
☐ **Formule générale** : $P[X = k] = \mathrm{C}_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
Loi de probabilités :

k	0	1	2	...	n
$\mathrm{P}[X = k]$	q^n	$\mathrm{C}_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1}$	$\mathrm{C}_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	...	p^n

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p**.

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n; p)$.

☐ **Espérance mathématique d'une loi binomiale** :

- Lorsqu'on simule un « grand nombre de fois » un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la moyenne du nombre de succès par schéma se rapproche d'un réel appelé **espérance mathématique** de la variable aléatoire X que l'on note $E(X)$.
- L'espérance mathématique de la loi binomiale de paramètres n et p est :

$$E(X) = np$$

☐ **Variance et écart-type d'une loi binomiale** :

- La variance d'une variable aléatoire est la quantité qui mesure la *dispersion* de X autour de sa moyenne (son espérance).
- $V(X)$ est la moyenne de l'écart au carré de valeurs par rapport à la moyenne
- Si les succès sont exprimés en €, l'espérance est exprimée en € et la variance en €².
- formule de la variance : $V(X) = np(1-p)$
- formule de l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

☐ **Exemple** : Un questionnaire à choix multiples comporte 5 questions. Pour chacune, 4 réponses sont proposées dont une seule est correcte. Un élève qui n'a pas étudié (ce qui n'arrive jamais) répond au hasard.
C'est une loi binomiale :

- Répétition de 5 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes
- On s'intéresse au nombre de réponses correctes dans la liste des questions du QCM.
- On note $X \hookrightarrow B\left(5, \frac{1}{4}\right)$ avec $p = \frac{1}{4}$ est la probabilité de "tomber" sur une réponse correcte.

Probabilité d'avoir tout faux

$$P[X = 0] = \mathrm{C}_5^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$$

Exactement 3 bonnes réponses

$$P[X = 3] = \mathrm{C}_5^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-3} = 10 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{9}{16} = \frac{90}{1024}$$

Chances de réussir s'il faut au moins 60%

$$\begin{aligned} P[X \geq 3] &= P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] \\ &= 10 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{9}{16} + 10 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{9}{16} + 10 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{9}{16} = \frac{106}{1024} \end{aligned}$$

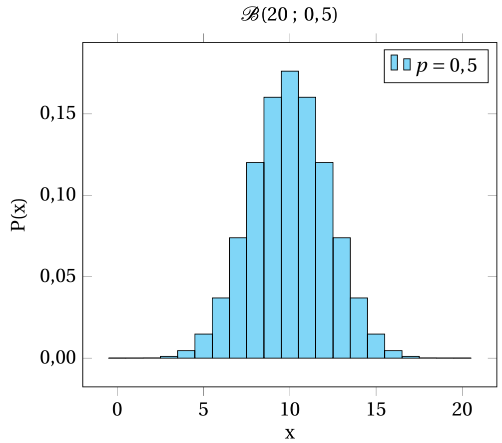
Combien de réponses correctes peut-on espérer en répondant au hasard ?
On calcule l'espérance de X. Cela correspond environ au nombre moyen de questions réussies par un élève, si on considère un grand nombre d'élèves répondant au hasard.

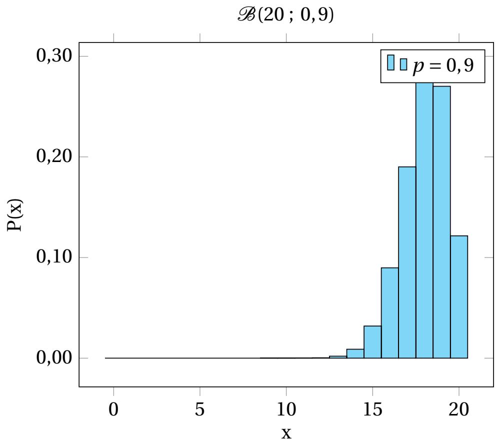
x_i	0	1	2	3	4	5
$P[X = x_i]$	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{243}{1024} + \ldots + 5 \cdot \frac{1}{1024} = 1,25$$

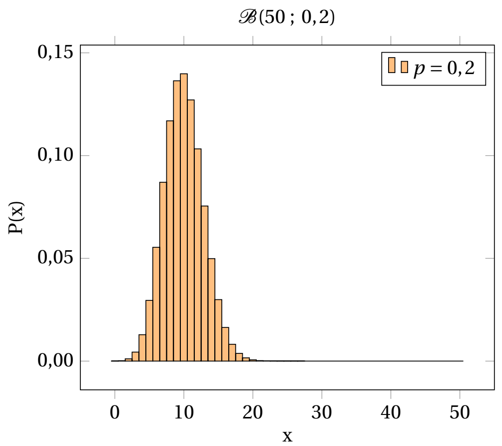
Mais plus simplement : $E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{4} = 1,25$

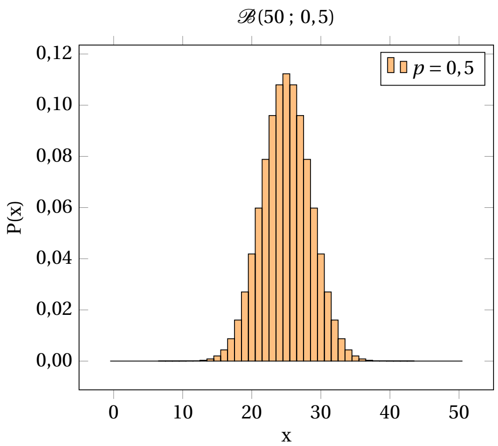
1.3.3 Illustration

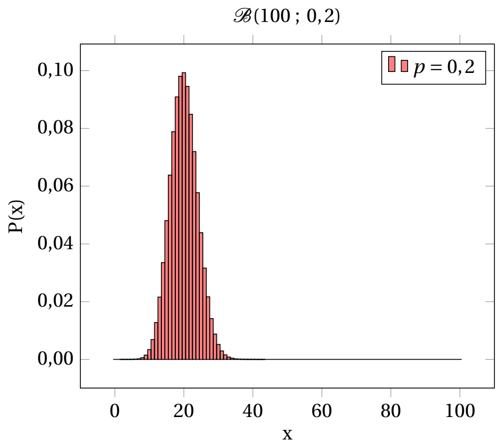


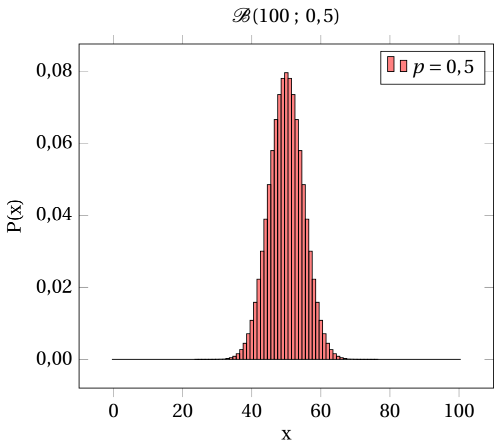


;









Quand $p = 0,5$, la distribution de la v.a. X est toujours symétrique

1.4 Exercices

1° Indiquer en justifiant si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n; \frac{1}{3})$ avec $n \geq 2$, alors $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(b) Si X suit la loi $\mathscr{B}(5; p)$ et si $P(X = 1) = \frac{5}{3} \cdot P(X = 0)$ alors $P(X = 2) = 3 \cdot P(X = 3)$

(c) Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale avec $E(X) = 36$ et $\sigma(X) = 3$ alors $P(X = 29) \approx 0,01$ au millième près.

2° Dans une région pétrolifère, la probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est 0,1.

(a) Justifier que la réalisation d'un forage peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli.

(b) On effectue 9 forages.

  (a) Quelle hypothèse doit-on formuler pour que la variable aléatoire X correspondant au nombre de forages qui ont conduit à une nappe de pétrole suive une loi binomiale ?

  (b) Sous cette hypothèse, calculer la probabilité qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole. En donner la valeur à 10^{-3} près.

3° Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés. On considère un entier positif ou nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

(a) Quelle est la loi de X ?

(b) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ? au moins 4 filles ?

(c) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

4° **Loi de probabilité et loi binomiale**

En étudiant les statistiques des tirs aux buts des joueurs de l'équipe première, l'entraîneur constate que, sur une série de 5 tirs, un joueur marque :

Nombre de tirs réussis	5	4	3
Probabilité de réussite	0,2	0,5	0,3

Tout entraînement se termine par une épreuve de tirs au but. Celle-ci consiste en 2 séries de 5 tirs et l'entraîneur considère qu'elle est réussie si le joueur marque au moins 8 buts.

(a) Calcule la probabilité pour que, sur dix séances d'entraînement, un joueur ne réussisse aucune épreuve. Commente ce résultat.

(b) Quel est le nombre minimal d'entraînements auquel doit participer un joueur pour que la probabilité de réussir au moins une épreuve soit supérieur à 0,99 ?

Fais apparaître les étapes de ta démarche et précise le modèle et la nature des variables que tu utilises.

5° Dans une réserve, on a regroupé dans le même parc **10** dromadaires, **7** chameaux et **3** lamas. On rappelle que, parmi ces camélidés, le chameau a deux bosses, le dromadaire a une bosse et le lama n'a pas de bosse. **Quinze** visiteurs prennent chacun en photo un camélidé choisi au hasard, de manière indépendante les uns des autres (le même animal peut donc être photographié par des visiteurs différents). On appelle X la variable aléatoire qui **compte le nombre de photos sans bosse** sur les **quinze** photos prises. *Résultats à 0,01 près.*

(a) La variable aléatoire X suit une loi particulière. Cite son nom ainsi que ses paramètres et explique pourquoi.

(b) Calcule la probabilité qu'il y ait **exactement trois** photos sans bosse.

(c) Calcule la probabilité qu'il y ait **au moins une** photo sans bosse.

(d) Donner l'espérance et la variance de X.

6° Chaque crocodile qui traverse la clairière séparant les kékés du fleuve a une probabilité 1/3 de périr écrasé par un éléphant sautant en parachute. Un matin, 32 crocodiles quittent les kékés pour rejoindre le fleuve. On note X, le nombre de victimes des éléphants parmi ces crocodiles. Les survivants reviennent le soir par le même chemin. On note Y le nombre total de victimes.

(a) Calculer la probabilité que 22 crocodiles se baignent dans le fleuve

(b) Calculer la probabilité que 7 crocodiles retournent sains et saufs le soir dans les kékés

(c) Calculer $\mathbf{E}(Y)$. Comment interpréter ce résultat ?

7° Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h. Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est 2/3. Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps en minute mis par l'élève pour aller au lycée.

(a) Déterminer la loi de probabilités de X.

(b) Exprimer T en fonction de X.

(c) Déterminer E(T) et interpréter ce résultat.

(d) L'élève part 17 minutes avant le début des cours.

  i. Peut-il espérer être à l'heure ?

  ii. Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

8° Monsieur Clavel a compris que le restaurant n'atteint pas un niveau normal de fréquentation. Il fait réaliser une étude de notoriété en centre-ville auprès d'un échantillon de 50 personnes. Cette étude montre que le restaurant dispose d'une notoriété assistée actuelle de 15%.

(a) Prouver que sur les 50 personnes interrogées, le nombre de personnes connaissant le restaurant du Mas du Père Soulas suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

(b) Donner la formule permettant de calculer la probabilité pour que 9 personnes sur les 50 connaissent le restaurant.

9° Une usine construit dix mille condensateurs par jour, et chacun a une probabilité 0.002 d'être défectueux. Très à cheval sur la qualité, l'usine les teste tous.

(a) Tester un condensateur coûte 0.1 euro. Si il est défectueux, il est détruit et cette destruction coûte un euro. Quel est le coût moyen journalier des tests de qualité (contrôle plus destruction)?

(b) Changement de technologie. Maintenant l'usine regroupe ses condensateurs par lots de 10 et les teste le lot en une seule fois. Le test coûte 0.1 euros et détermine si au moins une pièce du lot est défectueuse, sans être capable de déterminer *laquelle*. Si le tests montre que le lot est défectueux, le lot complet est détruit en bloc (ce qui coûte 1 euros).

Combien ce système coûte par jour ?

2 Lois continues

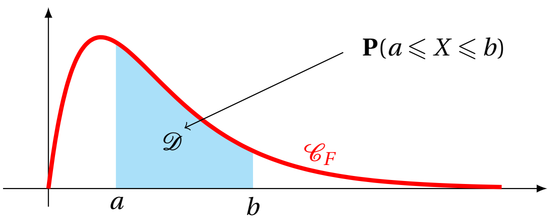
Une loi de probabilité continue n'est plus associée à la probabilité de chacune de ses valeurs mais à la probabilité d'intervalles de valeurs. Le calcul d'une probabilité s'effectue par un calcul d'aire sous la courbe d'une fonction définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ propre à chaque loi. Cette fonction est nommée fonction de densité sur $I \subseteq \mathbb{R}$; c'est toujours une fonction continue, positive et dont l'aire totale sous sa courbe est égale à 1 sur $I \subseteq \mathbb{R}$.

2.1 Variables aléatoires à densité

Une variable aléatoire X à densité est définie par une loi de densité f et pour tout intervalle $[a\,;\,b] \subset I$ on a

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \text{aire}\,(\mathscr{D})$$

où $\mathscr{D}$ est le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



On a alors

$$\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : La probabilité qu'une variable aléatoire à densité X prenne une valeur c est égale à 0 car

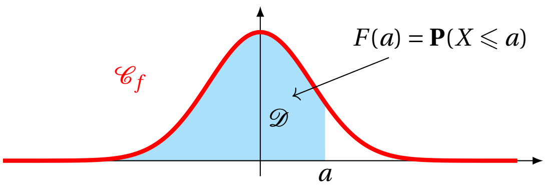
$$\mathbf{P}(X = c) = \int_c^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

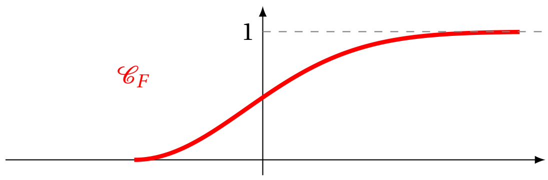
Par conséquent, les éventuelles inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges dans les calculs de probabilités : par exemple $\mathbf{P}\,(1 < X \leqslant 3) = P\,(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

2.1.1 Variable aléatoire continue définie sur l'ensemble des réels

Pour une loi de densité définie sur $I = \mathbb{R}$, la fonction de répartition associée à la variable aléatoire X est la fonction F définie sur $I = \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$$





lorsque $I = \mathbb{R}$: $F(a) = \mathbf{P}(X \leqslant a) = \lim\limits_{x \to -\infty} \displaystyle\int_x^a f(t)dt$

$$\mathbf{P}(X \leqslant a) \underset{\text{notation}}{=} \int_{-\infty}^a f(t)\;dt$$

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire continue X a les propriétés suivantes :

(a) F est une fonction croissante, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

2.1.2 Indicateur de dispersion

(a) L'**espérance** de X est le réel, noté $E(X)$, défini par la relation $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\;dx$.

(b) La **variance** de X est le réel, noté $V(X)$, qui, s'il existe, est défini par la relation

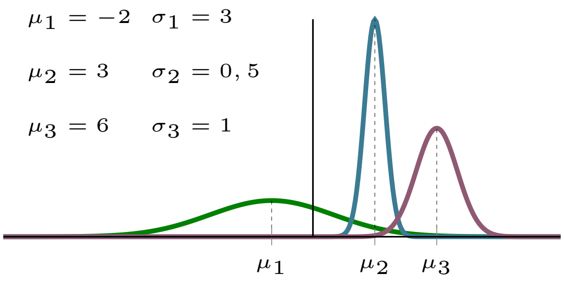
$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - E(X)\right]^2 f(x)\;dx.$$

(c) L'**écart-type** de X est le réel, noté σ_X, défini par la relation

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

2.2 Loi normale

On l'appelle souvent distribution gaussienne, en l'honneur de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), un éminent mathématicien allemand qui a apporté d'importantes contributions à une meilleure compréhension de la distribution normale.
La courbe de cette distribution est appelée « courbe en cloche » parce que le graphique de sa fonction de densité de probabilité ressemble à la forme d'une cloche.



La densité est symétrique et très concentrée autour de la moyenne (indiquée par la ligne verticale). Elle devient très petite en se déplaçant du centre vers la gauche ou vers la droite de la distribution. Cela signifie que plus une valeur est éloignée du centre de la distribution, moins il est probable d'observer cette valeur.
Soient μ un réel et σ un réel strictement positif, on appelle X la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ notée $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma)$ la loi de la variable aléatoire X définie sur $\mathbb{R}$ par la densité

$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Rappel : On calcule toujours la probabilité que la v.a.r soit comprise dans un intervalle $]a,b[$
Si une v.a. X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$, alors l'espérance de X vaut $E(X) = \mu$, sa variance vaut $V(X) = \sigma^2$ et son écart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
Lorsqu'on écrit qu'une v.a X suit une loi normale $\mathcal{N}(40;5)$, cela signifie que la valeur moyenne (espérance) de X vaut $E(X) = 40$ et 5 désigne son écart-type, donc $V(X) = 25$.

2.2.1 Loi Normale centrée réduite

Dans les calculs, on utilise la loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ ($\mu = 0$ et $\sigma = 1$) donnée par la fonction de densité (fonction de Gauss)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est la fonction π définie par :

$$\pi : t \mapsto \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Remarque : La fonction de Gauss est intégrable mais il est impossible de trouver une primitive de celle-ci au moyen des fonctions usuelles. Nous avons donc recours à une table de valeurs d'intégrales définies spécifiques calculées par des méthodes de calcul numérique approché.

Intégrale $\pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

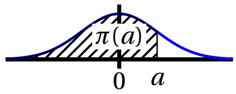
$$\pi(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad \pi(-t) = 1 - \pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

A retenir : Calculs avec la loi normale centrée réduite

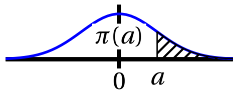
La table de la loi normale donne les valeurs de la fonction de répartition $\pi(a)$ pour les valeurs de a supérieures à 0.

$\boxed{P(Z \le a) = P(Z < a) = \pi(a).}$



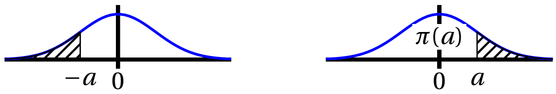
Exemple : $P(Z \le 0,68) = \pi(0,68) = 0,7517$ (lecture directe sur la table).

$\boxed{P(Z \ge a) = P(Z > a) = 1 - \pi(a).}$



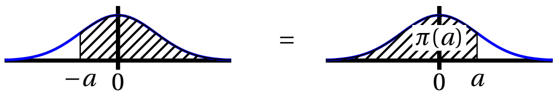
Exemple : $P(Z \ge 2,3) = 1 - \pi(2.3) = 1 - 0,9893 = 0,0107$.

$\boxed{\pi(-a) = 1 - \pi(a).}$



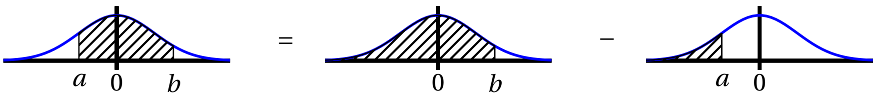
Exemple :
$P(Z < -1,42) = 1 - P(Z < 1,42) = 1 - 0,9222 = 0,0778$.

$\boxed{P(Z > -a) = P(Z < a) = \pi(a).}$



Exemple : $P(Z > -1,25) = P(Z < 1,25) = \pi(1,25) = 0,8944$.

$\boxed{P(a < Z < b) = \pi(b) - \pi(a).}$



Ex 1: $P(1,13Z < 2,4) = P(Z < 2,4) - P(Z < 1,13) = 0,9918 - 0,8708 = 0,121$.
Ex 2: $P(-0,73Z < 1,45) = P(Z < 1,45) - P(Z < -0,73) = \pi(1,45) - (1 - \pi(0,73) = 0,9265 - (1 - 0,7673) = 0,6938$.

Cas particulier : $\boxed{P(-a < Z < a) = 2 \cdot P(Z < a) - 1 = 2 \cdot \pi(a) - 1.}$

Exemple : $P(-1,74 < Z < 1,74) = 2.\pi(1,74) - 1 = 2 \times 0,9591 - 1 = 0,9182$.

2.2.2 Calculs avec la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$

Si X suit la loi normale de moyenne μ alors $X - \mu$ suit la loi normale centrée de moyenne 0 et d'écart type σ et $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

☐ **Exemple 1** : X suit la loi normale $\mathcal{N}(20;5)$. Déterminer $P(15 < X < 30)$.

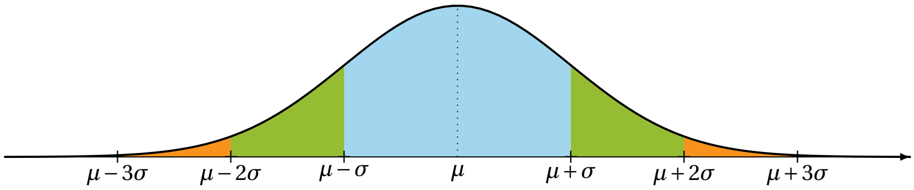
$$15 < X < 30 \iff 15 - 20 < X - 20 < 30 - 20 \iff \frac{15-20}{5} < \frac{X-20}{5} < \frac{30-20}{5} \iff -1 < Z < 2$$
$$\mathbf{P}(15 < X < 30) = \mathbf{P}(-1 < Z < 2) = \pi(2) - \pi(-1) = \pi(2) - (1 - \pi(1)) = 0,9772 - (1 - 0,84132) = 0.8185$$

☐ **Exemple 2** : X suit la loi normale $\mathcal{N}(24;6.5)$. Déterminer $P(X > 27)$.

$$X > 27 \iff X - 24 > 27 - 24 \iff \frac{X-24}{6.5} > \frac{27-24}{6.5} \iff Z > 0.46$$
$$\mathbf{P}(X > 27) = \mathbf{P}(Z > 0.46) = 1 - \pi(0.46) = 1 - 0,6772 = 0.3228$$

2.2.3 Propriétés : quelques intervalles remarquables

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$. On a alors :
- $P(X \in [\mu-\sigma\,;\,\mu+\sigma]) = P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}68$;
- $P(X \in [\mu-2\sigma\,;\,\mu+2\sigma]) = P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}954$;
- $P(X \in [\mu-3\sigma\,;\,\mu+3\sigma]) = P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$.



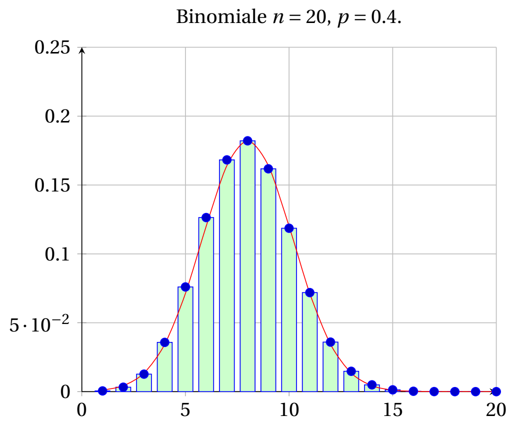
2.3 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

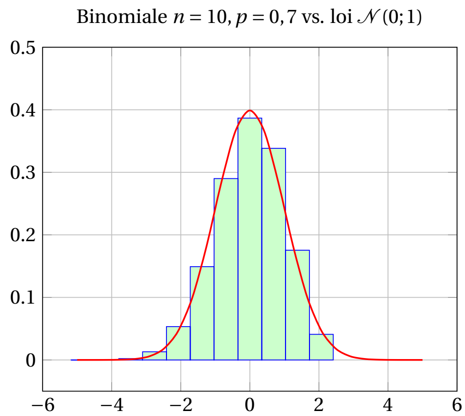
Sous certaines conditions, il est possible d'approcher une loi binomiale par une loi normale.
On considère qu'une très bonne approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ lorsque[1]

$$n \geq 30,\ np \geq 5 \text{ et } n(1-p) \geq 5$$

Autrement dit, n doit être assez grand, et p ne pas être trop proche de 0 ou 1.

2.3.1 Comparatif loi binomiale - loi normale





2.3.2 Théorème de Moivre-Laplace

Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

□ **Exemple** : Une usine produit 100 machines à laver par jour. On suppose qu'une machine a une probabilité égale à 0,1 de tomber en panne à la sortie de la chaine de production. On note X le nombre de machines en panne. Calculer la probabilité que moins de 5 machines par jour tombent en panne en utilisant *une approximation par la loi normale.*

Dans cet exemple : $\mu = np = 100 \times 0,1 = 10$ et $\sigma = \sqrt{np\left(1-p\right)} = \sqrt{100 \times 0,1 \times 0,9} = 3$
Les conditions requises pour appliquer une telle approximation sont présentes dans l'exemple :

$$n = 100 > 30,\ n \cdot p = 100 \times 0,1 = 10 \geq 5 \text{ et } n \cdot \left(1-p\right) = 100 \times 0,9 = 90 \geq 5$$

La probabilité recherchée $\mathrm{P}[0 \leq X \leq 5]$ se réécrit :

$$\begin{aligned} P[0 \leq X \leq 5] &= P\left[0-10 \leq X-10 \leq 5-10\right] \\ &= P\left[\tfrac{0-10}{3} \leq \tfrac{X-10}{3} \leq \tfrac{5-10}{3}\right] \\ &= P\left[-\tfrac{10}{3} \leq Z \leq \tfrac{-5}{3}\right] \end{aligned}$$

1. http://www.bibmath.net (voir rubrique formulaire)

Par ailleurs : $P\left[-\frac{10}{3} \leq Z \leq \frac{-5}{3}\right] = P\left[\frac{5}{3} \leq Z \leq \frac{10}{3}\right]$
$= P\left[Z \leq \frac{10}{3}\right] - P\left[Z \leq \frac{5}{3}\right]$

La lecture de la table nous donne : $\mathrm{P}\left[Z \leq \frac{5}{3}\right] \approx P[Z \leq 1,66] = 0,9515$ et $\mathrm{P}\left[Z \leq \frac{10}{3}\right] \approx P[Z \leq 3,33] = 0,9996$
Finalement : $\mathrm{P}[0 \leq X \leq 5] = 0,9996 - 0,9515 = 0,048 \approx 0,05$, la probabilité que moins de cinq machines tombe en panne par jour est d'environ 5%.

2.4 Exercices

1° Quelle valeur réelle doit-on donner à c pour que la fonction $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$ soit la densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ d'une variable aléatoire continue X ?

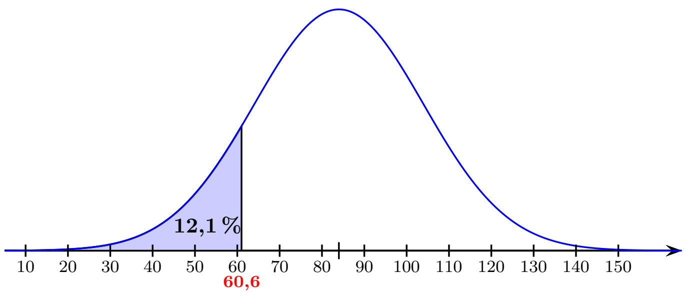
2° On considère une variable aléatoire Y suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et a est un réel tel que $\mathrm{P}(Y < a) = 0{,}7$. Déterminer les probabilités suivantes.

(a) $\mathrm{P}(Y \leqslant a)$
(b) $\mathrm{P}(Y > a)$
(c) $\mathrm{P}(Y \geqslant -a)$
(d) $\mathrm{P}(0 \leqslant Y \leqslant a)$
(e) $\mathrm{P}(Y \leqslant -a)$

3° On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

(a) $\mathrm{P}(X \leqslant 0{,}5)$
(b) $\mathrm{P}(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$
(c) $\mathrm{P}(X \geqslant 1)$
(d) $\mathrm{P}(X > -0{,}5)$
(e) $\mathrm{P}(X < -2)$
(f) $\mathrm{P}(-1 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$

4° Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 60,60) = 0,121$. La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



(a) En exploitant le graphique, Complète

i. $P(X \geqslant 107,40) =$ ______
ii. $P(X \geqslant 60,60) =$ ______
iii. $P(X \leqslant 107,40) =$ ______
iv. $P(60,60 \leqslant X \leqslant 107,40) =$ ______

(b) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{X-84}{\sigma}$.
  i. Comment appelle-t-on la loi de probabilité suivie par Z ?
  ii. Justifier que $P(X \leqslant 60,60) = P\left(Z \leqslant -\frac{23,40}{\sigma}\right)$
  iii. Calcule $P\left(Z \leqslant \frac{23,40}{\sigma}\right)$
  iv. Utiliser la table de la loi N(0,1) donnée en annexe pour en déduire la valeur de σ. La réponse seule ne suffit pas !

(c) Dans cette question, les probabilités seront données à 10^{-3} près. Sachant que $\sigma = 20$.
  i. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.
  ii. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

5° Les températures du mois d'aout autour du lac de Louvain-La-Neuve suivent la loi normale d'espérance 18,2 degrés et d'écart type 3,6 degrés. Une personne part camper en aout près du lac. Calculer la probabilité que la température :

(a) soit inférieure à 16 degrés

(b) soit comprise entre 20 degrés et 24,5 degrés

(c) soit supérieure à 21 degrés

6° Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(10; 0,64)$. Déterminer une valeur approchée de x au centième telle que :

(a) $P(X \leq x) = 0,95$

(b) $P(X \geq x) = 0,85$

7° On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres $\mu = 5$ et σ inconnu telle que $P(-7 \leqslant X \leqslant 17) \approx 0,997$.

(a) Déterminer une valeur approchée de σ.

(b) En déduire les probabilités suivantes sans utiliser une calculatrice.

i. $P(1 \leqslant X < 9)$

ii. $P(5 < X < 9)$

8° On considère une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(3\ ;\ \sigma)$ et telle que $P(X < 1) = 0,4$.
Déterminer les probabilités suivantes sans calculatrice.

(a) $P(1 \leqslant X < 3)$

(b) $P(X > 5)$

(c) $P(X \geqslant 1 \mid (X < 5))$ (probabilité conditionnelle)

9° X suit une loi normale de paramètres $\mu = 10$ et σ. On sait que $P(X \leqslant 11) = 0{,}8$.

(a) Quelle loi suit la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - 10}{\sigma}$?

(b) Déterminer la valeur de t tel que $P(Z \leqslant t) = 0{,}8$.

(c) En déduire la valeur de σ.

10° On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres μ inconnu et $\sigma = 2$ telle que $P(X \geqslant 11) \approx 0,0015$.

(a) Déterminer μ.

(b) En déduire $P(X < 5)$ sans calculatrice.

11° **Approximation binomiale → loi normale :** On jette 12 fois une pièce bien équilibrée. Calculer la probabilité p pour que le nombre de `Face` soit compris entre 4 et 7, en utilisant :

(a) la loi binomiale,

(b) l'approximation normale de la loi binomiale.

12° On lance 300 fois une pièce de monnaie truquée ce qui constitue une partie. La probabilité d'obtenir « face » est $\frac{2}{3}$. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre de « face » obtenus.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale, en préciser les paramètres. Peut-on calculer simplement $P(X > 210)$?

(b) On admet qu'une approximation de la loi binomiale par une loi normale se justifie. Recherche son espérance μ et son écart-type σ. (valeurs au centième près)

(c) Calculer $P(X > 210)$ à l'aide de cette approximation. (calculatrice autorisée)

13° Des observations médicales ont permis d'établir que, dans une population donnée de 100 000 individus, le taux de globules rouges (calculé en millions de globules par mm3 de sang) est distribué suivant une loi normale de moyenne 4,8 et d'écart-type 0,6. Une personne dont le taux se situe en dessous de 3,9 est en anémie et a besoin d'un traitement. Estime le nombre de personnes anémiques dans cette population.

14° On note X la variable aléatoire qui, à chaque homme prélevé au hasard, associe sa taille en centimètres. On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 178$ et d'écart-type $\sigma = 10$. Déterminer le réel b tel que $\mathrm{P}(176 - b \leq X \leq 180 + b) = 0,762$. Interprétez ce résultat par une phrase intelligible.

15° La masse en kg des nouveaux nés à la naissance est une variable aléatoire qui peut être modélisée par une loi normale de moyenne $\mu = 3{,}3$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}5$. Calculer la probabilité qu'un nouveau né pèse moins de 2,5 kg à la naissance.

16° Un fabricant de yaourts brassés utilise une machine pour remplir ses pots, dont la masse affichée est de 125gr.

La masse de yaourt X introduite dans chaque pot suit la loi $\mathcal{N}(125\,;\,2^2)$ et un pot est déclaré conforme s'il contient au moins 122gr de yaourt brassé.

(a) Quelle est la probabilité qu'un yaourt soit conforme ?

(b) Le gérant souhaite modifier les réglages de la machine pour diminuer le nombre de pots non conformes. Il souhaite obtenir 97% de yaourts conformes, sans changer la quantité moyenne de yaourt introduite dans les pots.

On suppose que la masse X de yaourt suit toujours une loi normale d'espérance $\mu = 125$. On note σ' la nouvelle valeur de l'écart-type.

i. Soit $Z = \dfrac{X - 125}{\sigma'}$. Quelle loi suit Z ?

ii. Expliquer pourquoi $122 \leqslant X \iff -\dfrac{3}{\sigma'} \leqslant Z$.

iii. En déduire la valeur de σ'.