1 Déterminer les racines carrées du nombre complexe $z = 9 + 40i$ .../2

Solution: on procède par étape :

— calcul du module de z : $|z| = \sqrt{81 + 1600} = 41$

— la partie imaginaire de z est positive : $\text{Im}(z) = 40 > 0$

— application de la formule générale :

$$\text{RCC}(z) = \pm\left(\sqrt{\tfrac{41+9}{2}} + i\sqrt{\tfrac{41-9}{2}}\right)$$

les racines carrées complexe de z sont : $5 + 4i$ et $-5 - 4i$

2 Calculer le module de $\left(\dfrac{2+5i}{5-2i}\right)^5$ .../2

Solution: on doit utiliser les propriétés du module :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{2+5i}{5-2i}\right)^5\right| &= \left(\left|\frac{2+5i}{5-2i}\right|\right)^5\\
&= \left(\frac{|2+5i|}{|5-2i|}\right)^5\\
&= \left(\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}\right)^5\\
&= 1
\end{aligned}$$

3 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \dfrac{1+im}{2m + i(m^2-1)}$ pour $m \in \mathbb{R}$. .../3

Solution:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)}\\
&= \frac{(1+im)(2m-i(m^2-1))}{(2m)^2+(m^2-1)^2}\\
&= \frac{2m+m(m^2-1)+2im^2-i(m^2-1)}{m^4+2m^2+1}\\
&= \frac{m^3+m+i(m^2+1)}{(m^2+1)^2}\\
&= \frac{m(m^2+1)+i(m^2+1)}{(m^2+1)^2}\\
&= \frac{m+i}{m^2+1}
\end{aligned}$$

donc $\text{Re}(z) = \frac{m}{m^2+1}$ et $\text{Im}(z) = \frac{1}{m^2+1}$.

4 Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué du nombre complexe $z - \overline{z} + iz$ en fonction de $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$. .../2

Solution: soit $z = a + bi$:

$$\begin{aligned}
z - \overline{z} + iz &= a + bi - (a - bi) + i(a + bi)\\
&= a + bi - a + bi + ai - b\\
&= -b + i(a + 2b)
\end{aligned}$$

par conséquent : $\overline{z - \overline{z} + iz} = -b - i(a+2b)$ ou $\overline{z - \overline{z} + iz} = -\text{Im}(z) - i\,(\text{Re}(z) + 2\text{Im}(z))$

5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+2i)z^2-(9+3i)z+10-5i=0$ …/3

Solution:

— calcul de ρ, de son module et du signe de sa partie imaginaire :
$\rho=-8-6i$, $\left|\rho\right|=10$ et $\mathrm{Im}(\rho)<0$

— une racine carré du réalisant : $\sqrt{\rho}=\sqrt{\frac{10-8}{2}}-i\sqrt{\frac{10+8}{2}}=1-3i$

— solutions de l'équation : $z_{1/2}=\frac{9+3i\pm(1-3i)}{2+4i}=\begin{cases}\frac{5}{1+2i}\\ \frac{4+3i}{1+2i}\end{cases}=\begin{cases}1-2i\\ 2-i\end{cases}$

l'ensemble des solutions :

$$S_{\mathbb{C}}=\{1-2i\ ;\ 2-i\}$$