Si f est dérivable on note f' sa dérivée. Si l'on souhaite dériver une quantité qui n'a pas de nom, on utilise la notation différentielle. On écrira ainsi $\cos'(x)$ ou $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x+2)$.
Pour calculer une dérivée on se sert :

- des dérivées des fonctions de référence (qu'il faut connaître parfaitement).
- des formules de dérivation :
  - $(f+g)' = f' + g'$
  - $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
  - $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$
- On peut également dériver une *composée* de fonctions dérivables avec la formule :

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g'$$

ou encore : $(f \circ g)(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(g(x))$ et $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Exercices

1 Calculer la dérivée première des fonctions suivantes. Factoriser / Simplifier l'expression obtenue le plus loin possible. **Obligatoire à partir du (f)**.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \sqrt{2x^2 - 4x + 2}$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{2x-2}{\sqrt{2x^2-4x+2}}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ t \mapsto (2t-1) \cdot \sqrt{1-4t}$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ t \mapsto \dfrac{4(1-3t)}{\sqrt{1-4t}}$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto x.\sqrt{x^2+x+1}$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{4x^2+3x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \sqrt[3]{3x^2+x+1}$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{6x+1}{3\sqrt[3]{\left(3x^2+x+1\right)^2}}$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \sqrt{(x-2)(1-x)}$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{-2x+3}{2\sqrt{(x-2)(1-x)}}$

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto x^3 \cdot \sin\left(x^2\right)$

Solution:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[x^3\right]' \cdot \sin\left(x^2\right) + x^3 \cdot \left[\sin\left(x^2\right)\right]' \\ &= 3x^2 \cdot \sin\left(x^2\right) + x^3 \cdot \cos\left(x^2\right) \cdot \left[x^2\right]' \\ &= 3x^2 \sin\left(x^2\right) + 2x^4 \cos\left(x^2\right) \\ &= x^2\left(3\sin\left(x^2\right) + 2x^2\cos\left(x^2\right)\right) \end{aligned}$$

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto 5x^3 \sin x$

Solution: Sortir la constante multiplicative : $(a \cdot f)' = a \cdot f' \implies 5\left(x^3 \sin(x)\right)'$
Appliquer la règle du produit : $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Finalement : $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto 5x^2\,(3\sin(x) + x\cos(x))$

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{1}{1 - \sin x}$

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ \theta \mapsto \sqrt{\tan\theta}$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{1 + \tan^2\theta}{2\sqrt{\tan\theta}}$

ou $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{1}{2\cos^2\theta\sqrt{\tan\theta}}$

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto (2\cos(7x) + 3\sin(7x))^2$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto 2\,(2\cos(7x) + 3\sin(7x))\,(-14\sin(7x) + 21\cos(7x))$

(k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ \phi \mapsto \tan^2(n\phi)$ avec $n \in \mathbb{N}_0$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ \phi \mapsto 2n \cdot \tan(n\phi)\left(1 + \tan^2(n\phi)\right)$

ou $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ \phi \mapsto \dfrac{2n \cdot \tan(n\phi)}{\cos^2(n\phi)}$

(l) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \sin(4x)\ \tan(4x)$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{4\sin 4x\left(\cos^2 4x + 1\right)}{\cos^2 4x}$

ou bien $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto 4\tan^2(4x)\sin(4x) + 4\tan(4x)\cos(4x) + 4\sin(4x)$

(m) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{4x}{5 - \tan x}$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{4x\tan^2(x) - 4\tan(x) + 4x + 20}{(5 - \tan x)^2}$

(n) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{\cos(6x)}{1 - \sin(6x)}$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{6}{1 - \sin(6x)}$

(o) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ t \mapsto \dfrac{t\sin t}{2 + 5t}$

Solution:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{(\sin t + t\cos t)(2+5t) - (t\sin t)(5)}{(2+5t)^2} \\
&= \frac{2\sin t + 5t\sin t + 2t\cos t + 5t^2\cos t - 5t\sin t}{(2+5t)^2} \\
&= \frac{5t^2\cos t + 2t\cos t + 2\sin t}{(2+5t)^2} \\
&= \frac{(5t^2 + 2t)\cos t + 2\sin t}{(2+5t)^2}.
\end{aligned}$$

(p) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{\cos x}{4x^2}$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto$

(q) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto \sin^3\left(x^2 - \sin x\right)$

Solution: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto 3(2x - \cos x) \cdot \sin^2\left(x^2 - \sin x\right) \cdot \cos(x^2 - \sin x)$