Nom, Prénom : ______________________________ **CLASSE :** ________

Ce test comporte 4 questions. Total de 15 points ramenés sur 20 au bulletin. Une réponse seule ne suffit pas, vous devez développer un raisonnement minimal.

1 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$. Il est important de vérifier les conditions d'existence des solutions et de détailler les étapes de la résolution. Il n'est pas nécessaire de préciser les conditions de résolution, pourvu que vous vérifiiez les valeurs trouvées dans l'équation de départ à l'aide de votre machine à calculer.

(a) $18\arcsin^2 x - 9\pi \arcsin x + \pi^2 = 0$ …/3

Solution: CE : $x \in [-1,1]$

on pose $t = \arcsin x$:

$$18t^2 - 9\pi t + \pi^2 = 0 \overset{\rho=9\pi^2}{\Longrightarrow} t = \frac{9\pi \pm 3\pi}{36} \iff \begin{cases} \arcsin x = \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \arcsin x = \frac{\pi}{6} \iff x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ces deux valeurs vérifient la CE, par conséquent $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

(b) $\arctan(2x) + \arctan(3x) = -\frac{\pi}{4}$ …/3

Solution: aucune CE

$S = \left\{-\frac{1}{6}\right\}$

2 Sans utiliser votre machine à calculer, montrez que $\cos\left(\arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right) = \frac{63}{65}$ …/3

Solution: Soit $\mathbf{A} = \cos\left(\arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \cos\left(\arctan\left(-\tfrac{4}{3}\right)\right) \cdot \cos\left(\arcsin\left(\tfrac{12}{13}\right)\right) - \sin\left(\arctan\left(-\tfrac{4}{3}\right)\right) \cdot \sin\left(\arcsin\left(\tfrac{12}{13}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}} \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{12}{13}\right)^2} - \frac{-\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}} \cdot \frac{12}{13} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} \\
&= \frac{63}{65}
\end{aligned}$$

AUTRE PISTE : en utilisant la relation $\cos^2 a = \frac{1}{1+\tan^2 a}$:

on calcule d'abord :

$$\begin{aligned}
\tan\left(\arctan\left(-\tfrac{4}{3}\right) + \arcsin\left(\tfrac{12}{13}\right)\right) &= \frac{-\frac{4}{3} + \tan\left(\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)\tan\left(\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)} \\
&= \frac{-\frac{4}{3} + \frac{12/13}{\sqrt{1-(12/13)^2}}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)\frac{12/13}{\sqrt{1-(12/13)^2}}} \\
&= \frac{-\frac{4}{3} + \frac{12}{5}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)\frac{12}{5}} \\
&= \frac{63}{65}
\end{aligned}$$

3 Indiquez les conditions d'existence puis le domaine de définition de la fonction …/3

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, x \mapsto \arccos\left(2x^2 - x\right)$$

Solution: CE : $\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \leq 0 \\ 2x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-1/2\,;1] \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ d'où **dom** $f = \left[-\frac{1}{2}\,;1\right]$

4 Déterminez l'intervalle $J = f^{-1}\left(\left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{4}\right]\right)$ sachant que $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. Vous pouvez soit fournir un schéma approximatif mais clair, soit donner une justification mathématique cohérente. …/3

Solution: Puisque f est décroissante, sa fonction réciproque f^{-1} est également décroissante. :

$$J = f^{-1}\left(\left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{4}\right]\right) = \left[f^{-1}\left(\frac{3\pi}{4}\right); f^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right[= \left[-1\,;\sqrt{3}\right[$$

en effet, $f^{-1}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = x_0 \iff f(x_0) = \frac{3\pi}{4} \iff \frac{\pi}{2} - \arctan(x_0) = \frac{3\pi}{4} \iff x_0 = -1$
et $f^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) = x_1 \iff f(x_0) = \frac{\pi}{6} \iff \frac{\pi}{2} - \arctan(x_1) = \frac{\pi}{6} \iff x_1 = \sqrt{3}$

AUTRE PISTE :

$$\begin{aligned} J = f^{-1}\left(\left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{4}\right]\right) &\iff f(J) = \left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{4}\right] \\ &\iff \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \leq \frac{3\pi}{4} \\ &\iff -\frac{\pi}{3} < -\arctan x \leq \frac{\pi}{4} \\ &\iff \frac{\pi}{3} > \arctan x \geq -\frac{\pi}{4} \\ &\iff \sqrt{3} > x \geq -1 \quad \text{(car la fonction arctan est strict. croissante)} \end{aligned}$$

donc, $J = \left[-1\,;\sqrt{3}\right[$