Algèbre linéaire
PESAM

F. Lancereau

4 septembre 2023

Table des matières

Chapitre 1

Systèmes linéaires

1.1 Systèmes d'équations

Souvent, la mise en équation d'un problème ne mène pas à une équation à une inconnue, mais à plusieurs équations à plusieurs inconnues.

Exemple : Cherchons s'il existe un paraléllépipède de volume 6, d'aire latérale 22, et dont la somme des longueurs de toutes les arêtes vaut 24.

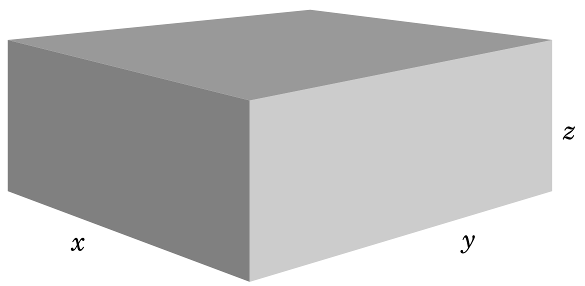


FIGURE 1.1 – Paraléllépipède

Comme sur le dessin, on note x, y, z les dimensions de notre paraléllépipède inconnu. Son volume est alors xyz, son aire latérale est $2(xy+xz+yz)$, et la somme des longueurs de ses arêtes est $4(x+y+z)$. De sorte que la question se ramène à la résolution du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} xyz & = & 6 \\ 2(xy+xz+yz) & = & 22 \\ 4(x+y+z) & = & 24 \end{array}\right.$$

La résolution d'un tel système n'est pas au programme. On va se limiter aux systèmes dit linéaires, dont on verra la définition plus loin.

Résoudre un système d'équations qui possède plusieurs inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ signifie trouver tous les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui vérifient toutes les équations du système. Un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui vérifie le système est appelé une *solution* du système. Ainsi, *l'ensemble des solutions* d'un système d'équation à n inconnues est un ensemble de n-uplets.

Exemple : Résolvons le système :

$$S \equiv \left\{\begin{array}{ccc} xy & = & -6 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right.$$

C'est un système à deux inconnues x et y. Donc l'ensemble de ses solutions sera un ensemble de couples. Si (x, y) est une solution de (S), alors

$$y = 1 - x \text{ (d'après la seconde équation) et } x(1-x) = -6 \text{ (d'après la première équation)}$$

En développant, on obtient $x^2 - x - 6 = 0$. On sait résoudre les équations de degré deux, et on montre que x est nécessairement égal à -2 ou à 3.

Par suite, le couple (x, y) est nécessairement égal à $(-2, 3)$ ou à $(3, -2)$.

Réciproquement, on vérifie immédiatement que ces deux couples sont bien des solutions de (S). En conclusion, l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{(-2,3),(3,-2)\}$$

1.2 Définition des systèmes linéaires

Définition 1.2.1

On appelle système linéaire de n équations à m inconnues $x_1, \ldots, x_m$ *tout système d'équations de la forme :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

où les $a_{i,j}$ et b_i, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, sont des constantes données. Lorsque tous les b_i sont nuls, on dit que le système est homogène.

Le système linéaire de la définition a n équations et m inconnues.

Exemple : Voici des exemples plus concrets de systèmes linéaires. Un système de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x + y & = & 4 \\ x - y & = & -3 \end{array}\right.$$

Un système de deux équations à trois inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + y - z & = & 7 \\ 3x - y + 4z & = & -3 \end{array}\right.$$

Un système de trois équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + 5y & = & -2 \\ 3x + y & = & 0 \\ -x + 2y & = & 1 \end{array}\right.$$

Attention 1.2.2

Il ne faut pas croire qu'un système linéaire admet toujours une unique solution. En effet, certains systèmes linéaires en admette une infinité, d'autres n'en admettent aucune.

1.3 Systèmes linéaires échelonnés

1.3.1 Définition

Définition 1.3.1

Considérons un système linéaire quelconque :

$$S \equiv \left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

Un tel système est dit échelonné *si à chaque fois que tous les coefficients situés à gauche d'un coefficient $a_{i,j}$ son nuls, il en est de même des coefficients situés sous $a_{i,j}$. Sur chaque ligne, la première inconnue figurant avec un coefficient non nul est appelée une* inconnue principale *du système. Les inconnues non principales sont dites* auxiliaires.

Exemple : Le système suivant est échelonné :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice n° 1

Pour chacun des systèmes suivants, dire s'il est échelonné et, s'il l'est, préciser ses inconnues principales et ses inconnues secondaires.

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (B)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$(C)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 5 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (D)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & y & - & 3z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right. \qquad (F)\quad x + 2y + 2z = 1$$

1.3.2 Résolution

La résolution des systèmes échelonné est très simple, c'est là tout leur intérêt : on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues auxilaires (s'il y en a), en partant de la dernière équation du système et en remontant.

Exemple : Résolvons le système échelonné suivant :

$$S \equiv \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Les inconnues principales sont x et y. On va les exprimer en fonction de l'inconnue auxiliaire z, en partant de la seconde équation.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & y & = & 4-2z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4-2z & + & z & = & 1 \\ & & & & y & = & 4-2z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -3+z \\ y & = & 4-2z \end{array}\right.$$

Conclusion : les solution de (S) sont les triplets de la forme $(-3+z, 4-2z, z)$. Autrement dit, l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{(-3+z,\, 4-2z,\, z) \in \mathbb{R}^3, \quad z \in \mathbb{R}\}$$

1.3.3 Exercices

Exercice n° 2

Résoudre le système échelonné suivant :

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice n° 3

Résoudre le système échelonné suivant :

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ & & y & - & 2z & + & t & = & 3 \\ & & & & 4z & - & t & = & 2 \\ & & & & & & 2t & = & -4 \end{array} \right.$$

Exercice n° 4

Résoudre le système échelonné suivant :

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ & & 2y & - & 2z & + & t & = & 1 \\ & & & & 2z & - & t & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice n° 5

Résoudre le système échelonné suivant :

$$S \equiv x + y + z = 1$$

1.4 La méthode du pivot de Gauss

Nous noterons toujours L_i la i-ème équation d'un système linéaire :

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{lcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m & = & b_2 & (L_2) \\ & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m & = & b_n & (L_n) \end{array} \right.$$

Théorème 1.4.1 (*les trois opérations élémentaires*)

Partant d'un système linéaire quelconque (S), on obtient un système linéaire équivalent si on lui applique l'une des opérations suivantes :

- *Échanger de deux lignes quelconques L_i et L_j. Opération qui se note $L_i \leftrightarrow L_j$;*
- *Multiplier une ligne quelconque L_i par un réel $a \neq 0$. Opération notée $L_i \leftarrow aL_i$;*
- *Ajouter à une ligne quelconque L_i un multiple aL_j d'une autre ligne (donc $j \neq i$). Cette opération se note $L_i \leftarrow L_i + aL_j$.*

La démonstration de ce théorème est immédiate, on va donc l'omettre. Les trois opérations décrites dans le théorèmes sont appelée « les trois opérations élémentaires ». On peut, lors de la résolution d'une système linéaire, appliquer librement ces trois opérations, c'est ce qu'affirme le théorème.

Considérons à nouveau un système linéaire quelconque (S) comme ci-dessus. Il est possible que x_1 ne figure pas dans la première ligne (si $a_{1,1}=0$). Mais quitte à permuter la première ligne avec une autre ligne où x_1 est présent (opération élémentaire du type $L_1 \leftrightarrow L_i$), on pourra toujours obtenir un système de la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_{1,1}x_1+c_{1,2}x_2+\cdots+c_{1,m}x_m & = & d_1 \\ c_{2,1}x_1+c_{2,2}x_2+\cdots+c_{2,m}x_m & = & d_2 \\ & \vdots & \\ c_{n,1}x_1+c_{n,2}x_2+\cdots+c_{n,m}x_m & = & d_n \end{array}\right.$$

où :

$$c_{1,1}\neq 0$$

Puisque $c_{1,1}$ est non nul, on peut diviser la première équation par $c_{1,1}$ (opération élémentaire qui se note $L_1 \leftarrow (1/c_{1,1})L_1$). Finalement, on arrive à un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+e_{1,2}x_2+\cdots+e_{1,m}x_m & = & f_1 \\ e_{2,1}x_1+e_{2,2}x_2+\cdots+e_{2,m}x_m & = & f_2 \\ & \vdots & \\ e_{n,1}x_1+e_{n,2}x_2+\cdots+e_{n,m}x_m & = & f_n \end{array}\right.$$

On applique alors les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - e_{2,1}L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - e_{3,1}L_1,\ldots$, $L_2 \leftarrow L_n - e_{n,1}L_1$. Ceci a pour effet de « faire disparaître »l'inconnnue x_1 dans toutes les lignes autres que la première. Ainsi, on obtient un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+g_{1,2}x_2+\cdots+g_{1,m}x_m & = & h_1 \\ g_{2,2}x_2+\cdots+g_{2,m}x_m & = & h_2 \\ & \vdots & \\ g_{n,2}x_2+\cdots+g_{n,m}x_m & = & h_n \end{array}\right.$$

Remarque 1.4.2

Il n'y a plus de x_1 dans les lignes $L_2, L_3, \ldots, L_n$. Mais il est tout à fait possible qu'il n'y ait plus non plus de x_2 ou de $x_3\ldots$

Ce qu'on vient de faire avec le système (S), on le refait avec le « sous-système »suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g_{2,2}x_2+\cdots+g_{2,m}x_m & = & h_2 \\ & \vdots & \\ g_{n,2}x_2+\cdots+g_{n,m}x_m & = & h_n \end{array}\right.$$

Puis on fera de même avec un « sous-système »du « sous-système ». Il est clair que ces manipulations ne continueront pas indéfiniment, et qu'on va aboutir à un système échelonné. On a ainsi démontré le résultat suivant :

Théorème 1.4.3

Partant d'un système linéaire quelconque, on peut toujours, en lui appliquant judicieusement les trois opérations élémentaires, obtenir un système échelonné.

C'est précisément la méthode exposée plus haut, lors de la démonstration de ce théorème, qu'on appelle « méthode du pivot de Gauss ».

Corollaire 1.4.4

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné.

Ce corollaire est une conséquence immédiate des deux théorèmes qui le précèdent. Il est temps de donner un exemple.

Exemple : Résolvons le système linéaire suivant :

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -2y & + & z & = & 1 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -2y & + & z & = & 1 \\ & & -y & - & 3z & = & -1 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & \frac{1}{2}z & = & \frac{-1}{2} \quad (L_2 \leftarrow \frac{-1}{2}L_2) \\ & & -y & - & 3z & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & \frac{1}{2}z & = & \frac{-1}{2} \\ & & & & \frac{-7}{2}z & = & \frac{-3}{2} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array} \right.$$

Nous somme ainsi parvenu, après quatre opérations élémentaires, à un système échelonné, équivalent à (S). La résolution de ce système échelonné est aisée : on trouve une unique solution, qui est le triplet :

$$\left(\frac{6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

1.4.1 Exercices

Exercice n° 6

Résoudre le système suivant :

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 1 \\ 5x & + & 7y & = & 3 \end{array} \right.$$

Exercice n° 7

Résoudre le système suivant :

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & 4y & = & 10 \\ 3x & + & 6y & = & 15 \end{array} \right.$$

Exercice n° 8

Résoudre le système suivant :

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & 5 \\ -6x & + & 3y & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice n° 9

Résoudre le système suivant :

$$S \equiv \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Exercice n° 10

Résoudre le système suivant :

$$S \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \\ 5x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice n° 11

Résoudre le système suivant :

$$S \equiv \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 4x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

Exercice n° 12

Résoudre le système suivant :

$$S \equiv \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

Exercice n° 13

Résoudre le système suivant :

$$S \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 3t + u = 13 \\ x + y + 2z + 7t + 3u = 25 \\ -x + 4y - 5z + 12t - 4u = 2 \\ 2x - 4y + 5z + t = 13 \\ 4x - 3y + 4z + 23t + 9u = 84 \end{cases}$$

Exercice n° 14

Résoudre le système suivant, k étant un paramètre :

$$S \equiv \begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

Exercice n° 15

Donner le nombre de solutions du système suivant en fonction du paramètre k :

$$S \equiv \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice n° 16

Même question pour le système suivant :

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & kz & = & 1 \\ 2x & + & ky & + & 8z & = & 3 \end{array} \right.$$

Exercice n° 17

À quelle condition sur les paramètres a, b, c, le système suivant admet-il au moins une solution ?

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 3x & - & y & + & 2z & = & b \\ x & - & 5y & + & 8z & = & c \end{array} \right.$$

Exercice n° 18

Trouver tous les polynômes P de degré ≤ 2 qui vérifient :

$$P(0) = P(1) = 1, \quad P'(0) = 0$$

Exercice n° 19

Trouver tous les polynômes P de degré ≤ 2 qui vérifient :

$$P(0) = P(1) = 1, \quad P'(0) = 0$$

Exercice n° 20

Trouver tous les polynômes P de degré ≤ 3 qui vérifient :

$$P(0) = P'(0) = 0, \quad P(1) = P'(1) = 1$$

Exercice n° 21

Trouver tous les polynômes P de degré ≤ 3 qui vérifient :

$$P(-2) = P(0) = P(2) = 0, \quad P(-3) = P(1) = 1$$

Exercice n° 22

Trois personnes ont constaté qu'à chaque fois qu'elles montent à deux en même temps sur un pèse-personne, celui-ci affiche 142 kg. Que peut-ont dire du poids de ces personnes ?

Chapitre 2

Calcul matriciel

2.1 Introduction

Chaque année, 20% de la population d'une ville X migre vers une ville Y et 5% de la population de la ville Y migre vers la ville X. On suppose que ces migrations sont les seuls facteurs influant sur la population des ville.

1. On note x et y les populations respectives de X et Y une année donnée et x', y' les populations respectives l'année suivante. Expliquer pourquoi $X' = AX$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} ;\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

2. Si la population actuelle de X est 8500 habitants, celle de Y, 11500. Quelles étaient les population l'année précédente ?

3. Expliquer pourquoi la population au bout de n années sera de $A^n X$.

4. Calculer les populations au bout de trois années.

5. À l'aide de la calculatrice, donner avec des coefficients arrondis au millième les matrices A^{10}, A^{30}, A^{50}, A^{100}.

6. Quel phénomène observe-t-on ?

7. Quelles seront les populations au bout de 50 ans ?

8. Comment vont-elles évoluer ?

9. Si la population totale des deux villes est de $x + y = 20000$, quelles seront les populations 50 ans après ? Cela dépend-il de la répartition initiale x et y entre les deux villes ?

2.2 Définitions, notations

Définition 2.2.1

Une matrice de dimension (m,n) est un tableau rectangulaire de $m \times n$ éléments, rangés en m lignes et n colonnes. On utilise aussi la notation $m \times n$ pour la dimension. Lorsque m = n, on dit plutôt : matrice carrée d'ordre n. Si m = 1, on parle de matrice-ligne d'ordre n, et si n = 1, on parle de matrice-colonne d'ordre m.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

A est une matrice carrée d'ordre 3. B est de dimension (3,2), C de dimension (2,3). D est une matrice-colonne d'ordre 3 et E une matrice-ligne d'ordre 3.

Conventions

Chaque matrice est encadrée par des crochets - [ ] - ou des parenthèses - ( ), parfois par d'autres symboles (accolades, traits doubles, ...) : la seule notation non admise est le trait simple - | | - réservé aux déterminants. L'écriture d'une matrice quelconque d'ordre $m \times n$ nécessite un rangement convenable des coefficients et surtout de savoir situer la position de chaque coefficient dans la matrice. La manière la plus simple pour y parvenir est de les indexer par deux nombres, le premier précisant la ligne qui le contient, le deuxième la colonne qui le contient. On note alors, par exemple : $A = \left(a_{ij}\right)$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix}$

Définition 2.2.2

Deux matrices de même dimension, $\left(a_{ij}\right)$ et $\left(b_{ij}\right)$, sont égales si et seulement si : $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout couple (i,j).

Définition 2.2.3

La diagonale d'une matrice $\left(a_{ij}\right)$ est l'ensemble des éléments a_{ii}.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{b_{11}} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & \mathbf{b_{22}} & b_{23} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \mathbf{c_{11}} & c_{12} \\ c_{21} & \mathbf{c_{22}} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$

Conventions

L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes se note :

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes se note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

2.2.1 Exercices

Exercice n° 23

Soit la matrice M telle que $M_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot (2i+3j)^2$ avec $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3$. Quelles sont les dimensions de la matrice ? Ecrire M.

Exercice n° 24

Expliciter les matrices :

$$A = \left((-1)^{i+j}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 3}}, \qquad B = (i+j)_{\substack{1\leq i\leq 2 \\ 1\leq j\leq 3}}$$

$$C = (ij)_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 2}}, \qquad D = (2i)_{\substack{1\leq i\leq 4 \\ 1\leq j\leq 1}}$$

Exercice n° 25

Ecrire la matrice d'ordre 3 vérifiant : $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$

Exercice n° 26

Trouver une écriture compacte pour la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

2.3 Opérations

2.3.1 Transposition

Définition 2.3.1

La transposée d'une matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice $A^t = (a_{ji})$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Ceci revient à effectuer une symétrie par rapport à la diagonale de A.

Exemple : Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a pour transposée $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

De même, la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ a pour transposée $B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Propriété

Si A est de dimension (m,n), alors A^t est de dimension (n,m). En particulier, si A est carrée d'ordre n, alors A^t a le même format. La transposée d'une matrice-colonne est une matrice-ligne, et réciproquement. Enfin, $(A^t)^t = A$ pour toute matrice A.

Vocabulaire

Une matrice carrée A est dite symétrique si elle vérifie : $A^t = A$

Exemple : la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique. On a $a_{ij} = a_{ji}$.

Vocabulaire

Une matrice carrée A est dite asymétrique si elle vérifie : $A^t = -A$

Exemple : la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique. On a $b_{ij} = -b_{ji}$.

2.3.2 Produit par un réel

Définition 2.3.2

Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ par le nombre λ est la matrice $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$. On dit aussi que $\lambda \cdot A$ est le produit de A par le scalaire λ.

Exemple : $-2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \\ -8 & 12 & -16 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_{11}}{2} & \frac{y_{12}}{2} & \frac{y_{13}}{2} \end{pmatrix}$

Définition 2.3.3

Pour chaque dimension (m,n), on note O_{mn} la matrice nulle dont tous les éléments sont nuls. Si la dimension est sous-entendue, on la note simplement O.

Propriété

1. A et $\lambda \cdot A$ ont toujours la même dimension.
2. $\lambda \cdot (A^t) = (\lambda \cdot A)^t$
3. Pour toute matrice A et tous scalaires λ et μ, on a : $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$
4. $0.A = O_{mn}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_{mn}$
5. $1.A = A$
6. $2.A = A + A$
7. $(-1).A = -A$
8. $\lambda \cdot A = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $A = O$

2.3.3 Addition de deux matrices

Définition 2.3.4

L'addition de deux matrices A et B n'est possible que lorsque les deux matrices ont les mêmes dimensions.
Dans ce cas, la somme C des deux matrices a pour coefficient la somme des coefficients de A et B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété

Pour A, B, C de même dimension et des scalaires λ, μ :

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ associativité
2. $A + B = B + A$ commutativité
3. $A + O = A = O + A$ (O est l'élément neutre)
4. toute matrice admet une opposée, $-A = (-1) \cdot A$
5. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ et $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
6. $(A + B)^t = A^t + B^t$

2.3.4 Exercices

Exercice n° 27

Pour tous nombres réels x, y, z, calculer la matrice :

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des triplets de réels (x, y, z) tels que

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Exercice n° 28

On définit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices en posant :

$$\begin{cases} U_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\\ \forall n\in\mathbb{N},\quad U_{n+1}=U_n+\begin{pmatrix}0 & 2\\-2 & 0\end{pmatrix}\end{cases}$$

Calculer U_1, U_2, U_3. Exprimer la matrice U_n en fonction de n.

Exercice n° 29

On définit une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices en posant :

$$\begin{cases} A_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ \forall n\in\mathbb{N},\quad A_{n+1}=-2A_n+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\end{cases}$$

Calculer A_1, A_2, A_3. Exprimer la matrice A_n en fonction de n.

2.3.5 Produit de matrices

2.3.5.1 Faisabilité

Le produit de matrices $A\cdot B$ existe si et seulement le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Soit A une matrice $n\times p$ et B une matrice $p\times q$. Alors, la matrice $C=A\cdot B$ est une matrice $n\times q$.

Attention 2.3.5

le produit de matrices n'est pas **commutatif** *:* $A\cdot B\neq B\cdot A$.

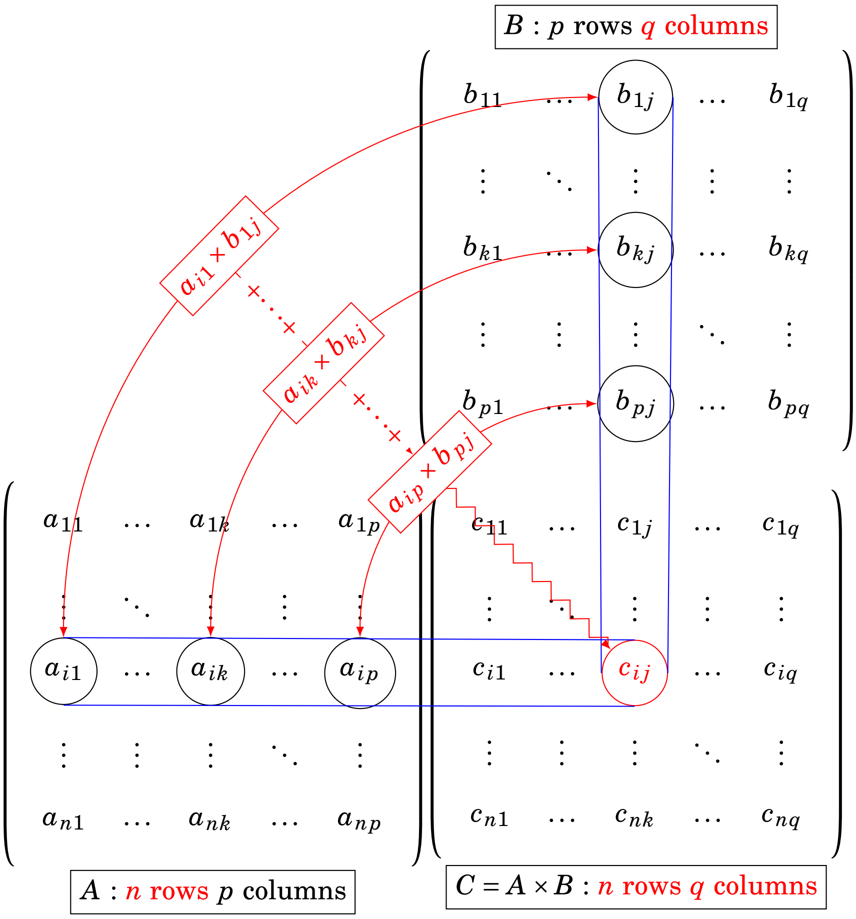
Exemple : Soit A une matrice 2×3 et B une matrice 3×4.

Alors, la matrice $C=A\times B$ est une matrice 2×4. De plus, le produit $B\times A$ n'existe pas.

2.3.5.2 Détail du calcul

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

avec i = i ième ligne et j = j ième colonne



Exemple :

1. Prenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a $C = A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

2. Prenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a $C = A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Prenons $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et calculons M^2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5 & 2 & 10\\2 & 1 & 4\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

On a $M^2 = \begin{pmatrix}5 & 2 & 10\\2 & 1 & 4\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Attention 2.3.6

Le produit $A \cdot B$ peut être la matrice nulle avec $A \neq O$ et $B \neq O$ (le produit des matrices n'est pas intègre, voir exemple ci-après)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\6 & 5 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & 4\\1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

En particulier, dans le calcul matriciel, l'égalité matricielle $A \cdot C = B \cdot C$ n'implique pas nécessairement $A = B$

2.3.6 Exercices

Exercice n° 30

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\5 & 7 & 0\\-1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 6 & 1\\3 & 2 & -1\\2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix}7\\-1\\3\end{pmatrix}$

Calculer : $A \cdot B$ puis $B \cdot A$ et conclure, $(A \cdot B)^t$ et $B^t \cdot A^t$, A^2, $A \cdot I$ et $I \cdot A$, $A \cdot C$ et $C \cdot A$

Exercice n° 31

Calculer les produits suivants :

$A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\1 & -1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix}-2 & 3\\5 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 6\end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2 & 3\\5 & 1\end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\end{pmatrix}$

$F = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$
avec $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

$G = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$

$H = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & -2 & 1\\0 & 5 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$
avec $(x, y, z \in \mathbb{R})$

Exercice n° 32

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant les règles de calcul matriciel, développer l'expression :

$$(A+B)^2$$

Donner un exemple qui prouve qu'en général : $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Exercice n° 33

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice n° 34

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice n° 35

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice n° 36

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B commutent, c'est-à-dire que $AB = BA$. Démontrer que $A^2B^2 = (AB)^2$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2B^2 et $(AB)^2$. A-t-on $AB = BA$?

Exercice n° 37

Trouver toutes les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ dont le carré est une matrice nulle. Même question en remplaçant « matrice nulle » par « matrice unité ». Même question en remplaçant « est une matrice nulle » par « est égale à elle-même ».

Exercice n° 38

Soit :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $(B - 3I_2)(B - 4I_2) = 0_2$.
2. Définir deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = a_nB + b_nI_2$$
3. Exprimer B^n en fonction de n.

2.4 Matrices carrées

Pour deux matrices carrées de même ordre A et B, la somme A + B et les produits AB et BA existent toujours (on n'a plus à se soucier des conditions d'existence). Toutes les propriétés vues ci-dessus sont encore vraies, et le calcul matriciel ressemble beaucoup au calcul algébrique ordinaire, à deux exceptions près :

- le produit n'est pas commutatif,
- il n'est pas intègre.

Il n'y a donc pas, en général, d'identités remarquables ni de formules donnant les racines d'une équation matricielle. Les propriétés supplémentaires sont liées à l'existence d'un élément neutre pour le produit et d'inverses dans certains cas.

2.4.1 Matrices identités

Définition 2.4.1

Pour chaque ordre n, on appelle matrice identité d'ordre n la matrice notée I_n définie par :

$$I_n = \left(\delta_{ij}\right) \text{ avec : } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Autrement dit, c'est une matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls saufs ceux de la diagonale qui valent 1. Si l'ordre est implicite, on la note I.

Exemple : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propriétés

La matrice identité est élément neutre du produit des matrices carrées d'ordre n :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n \quad : \quad A \cdot I_n = A = I_n \cdot A$$

Plus généralement, pour toute matrice A de dimension (m,n) :

$$I_m \cdot A = A$$

et pour toute matrice B de dimension (m,n) :

$$B \cdot I_n = B$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

2.5 Quelques matrices particulières

2.5.1 Les matrices triangulaires

Définition 2.5.1

On appelle matrice triangulaire supérieure *toute matrice carrée de la forme :*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On définit de façon analogue les matrices triangulaires inférieures.

Exemple : Les matrices 0_n et I_n sont à la fois triangulaires supérieures et inférieures.

Proposition

1. Tout produit d'une matrice triangulaire supérieure par un réel est triangulaire supérieure ;
2. Toute somme de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure ;
3. Tout produit de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

Proposition

Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si tous ses termes diagonaux sont non nuls. Et dans ce cas, son inverse est triangulaire supérieure.

Remarque : Les deux propositions précédente restent vraies en remplaçant partout « supérieure » par « inférieure ».

2.5.2 Les matrices diagonales

On considère des matrices carrées.

Définition 2.5.2

On appelle matrice diagonale *toute matrice carrée de la forme :*

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

où $d_1, d_2, \dots, d_n$ sont des réels quelconques. Une telle matrice est parfois notée :

$$\operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

Les matrices diagonales sont donc les matrices qui sont à la fois triangulaires inférieures et supérieures.

« règles de calcul »

Les égalités qui suivents sont vraies pour tous réels $\lambda, d_1, d_2, \dots, d_n, d'_1, d'_2, \dots, d'_n$:

1. $\lambda \cdot \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \operatorname{diag}(\lambda \cdot d_1, \lambda \cdot d_2, \dots, \lambda \cdot d_n)$
2. $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) + \operatorname{diag}(d'_1, d'_2, \dots, d'_n) = \operatorname{diag}(d_1 + d'_1, d_2 + d'_2, \dots, d_n + d'_n)$
3. $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)\operatorname{diag}(d'_1, d'_2, \dots, d'_n) = \operatorname{diag}(d_1 d'_1, d_2 d'_2, \dots, d_n d'_n)$

Proposition

Une matrice diagonale $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ est inversible si et seulement si $d_1, d_2, \dots, d_3$ sont tous non nuls. Et dans ce cas :

$$\operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)^{-1} = \operatorname{diag}(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \dots, d_n^{-1})$$

2.6 Matrices inverses

2.6.1 Inversion d'une matrice 2×2

Condition pour qu'une matrice soit inversible

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ admet une matrice inverse $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Après développement des deux égalités précédentes, on obtient deux systèmes linéaires équivalents à

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_{11}.a_{11} & + & x_{12}.a_{21} & = & 1 \\ x_{21}.a_{11} & + & x_{22}.a_{21} & = & 0 \\ x_{11}.a_{12} & + & x_{12}.a_{22} & = & 0 \\ x_{21}.a_{12} & + & x_{22}.a_{22} & = & 1 \end{array}\right.$$

La première équation et la troisième équation forment un système linéaire aux inconnues x_{11} et x_{12} tandis que les deux autres équations forment un système linéaire aux inconnues x_{21} et x_{22}.

Pour que ces systèmes admettent une solution unique et bien déterminée, il faut et il suffit que $$a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} \neq 0$$

A retenir

> Une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} \neq 0$

2.6.1.1 Calcul de l'inverse d'une matrice

On résoud le système d'équations en x_{11} et x_{12} par combinaison linéaire :

- on élimine l'inconnue x_{12}

$$\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{lcl} a_{11}.x_{11} + a_{21}.x_{12} & = & 1 \\ a_{12}.x_{11} + a_{22}.x_{12} & = & 0 \end{array}\right. & \begin{array}{r} \times\langle -a_{22}\rangle \\ \times\langle a_{21}\rangle \end{array} \\ \hline (-a_{11}.a_{22} + a_{12}.a_{21}).x_{11} = -a_{22} & \langle + \rangle \end{array}$$

- on élimine l'inconnue x_{11}

$$\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{lcl} a_{11}.x_{11} + a_{21}.x_{12} & = & 1 \\ a_{12}.x_{11} + a_{22}.x_{12} & = & 0 \end{array}\right. & \begin{array}{r} \times\langle -a_{12}\rangle \\ \times\langle a_{11}\rangle \end{array} \\ \hline (-a_{12}.a_{21} + a_{11}.a_{22}).x_{12} = -a_{12} & \langle + \rangle \end{array}$$

Posons $\Delta = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$. On obtient : $x_{11} = \dfrac{a_{22}}{\Delta}$ et $x_{12} = \dfrac{-a_{12}}{\Delta}$.

De la même façon, on résoud le système d'équations en x_{21} et x_{22}. Cela donne : $x_{21} = \dfrac{-a_{21}}{\Delta}$ et $x_{22} = \dfrac{a_{11}}{\Delta}$.

A retenir

> La matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\Delta} & \dfrac{-a_{12}}{\Delta} \\ \dfrac{-a_{21}}{\Delta} & \dfrac{a_{11}}{\Delta} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

La matrice inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 inversible est obtenue en échangeant les éléments de la diagonale principale, en changeant les signes des éléments de la diagonale secondaire et en multipliant la matrice obtenue par l'inverse de Δ

2.6.1.2 Exercices

Exercice n° 39

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer les matrices inverses.

$\begin{pmatrix}3 & 5\\2 & 6\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & -3\\2 & -4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3 & 2\\-3 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

Exercice n° 40

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix}4 & 11\\1 & 3\end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{pmatrix}4 & 11\\1 & 3\end{pmatrix}M + \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & 5\end{pmatrix}$$

2.6.1.3 Déterminant d'une matrice 2x2 — Systèmes linéaires

Définition 2.6.1

Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ *est le réel* $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$.

On le note $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ *ou bien* $\det A$

C'est donc la différence entre le produit des éléments de la diagonale principale et du produit des éléments de la diagonale secondaire de la matrice A.

Notons aussi que le déterminant d'une matrice n'est en aucune manière de même nature que les éléments de la matrice en question.

Propriétés

1. Si on multiplie les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) par un réel, le déterminant est multiplié par ce réel.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}k.a_{11} & k.a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} &= k.a_{11}.a_{22} - k.a_{12}.a_{21}\\ &= k.(a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21})\\ &= k.\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

2. Si les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) sont proportionnels aux éléments de l'autre ligne (ou de l'autre colonne) alors le déterminant est nul.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}k.a_{11} & k.a_{12}\\a_{11} & a_{12}\end{vmatrix} &= k.a_{11}.a_{12} - k.a_{11}.a_{12}\\ &= 0\end{aligned}$$

3. Le déterminant change de signe lorsqu'on permute deux lignes (ou deux colonnes)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\a_{11} & a_{12}\end{vmatrix} &= a_{12}.a_{21} - a_{11}.a_{22}\\ &= -(a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21})\\ &= -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

4. $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+b_{12}\\a_{21} & a_{22}+b_{22}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{11} & b_{12}\\a_{21} & b_{22}\end{vmatrix}$ La preuve est laissée au lecteur.

5. $\det A^t = \det A$

2.6.1.4 Exercices

1. Calculer :

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}0 & -5\\10 & 18\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}-5 & -2\\-4 & -3\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}-5 & 4\\3 & 1\end{vmatrix}$$

2. Simplifier en mettant en évidence des facteurs communs :

$$\begin{vmatrix}a^2 & b\\a & b^2\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}a^2-b^2 & a-b\\a+b & -1\end{vmatrix}$$

2.6.1.5 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Le système linéaire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2\end{cases}$$

équivaut à l'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

Si on pose $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ alors le système linéaire s'écrit $A.X=Y$ et une condition nécessaire et suffisante pour que celui-ci admette une solution unique est que $\det A \neq 0$ (le système linéaire est alors appelé *système de Cramer*).

Dans ce cas, A^{-1} existe et on peut multiplier les deux membres de l'équation matricielle $A.X=Y$ par cette matrice.

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}Y\\ \left(A^{-1}A\right)X &= A^{-1}Y\\ (I)X &= A^{-1}Y\\ X &\overset{(*)}{=} A^{-1}Y\end{aligned}$$

On obtient les inconnues en effectuant le produit matriciel entre la matrice inverse de A et la matrice colonne Y.

2.6.1.6 Méthode de Cramer

On développe l'égalité (*) en écrivant :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} &= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\-a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}a_{22}.y_1-a_{12}.y_2\\-a_{21}.y_1+a_{11}.y_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\det A}(a_{22}.y_1-a_{12}.y_2)\\ \frac{1}{\det A}(-a_{21}.y_1+a_{11}.y_2)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{\begin{vmatrix}y_1 & a_{12}\\y_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\det A}\\ \dfrac{\begin{vmatrix}a_{11} & y_1\\a_{21} & y_2\end{vmatrix}}{\det A}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Puisque deux matrices égales ont des éléments de mêmes indices égaux :

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}y_1 & a_{12}\\y_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & y_1\\a_{21} & y_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Δ_1 est obtenu à partir du déterminant du système en remplaçant les coefficients de x_1 par les termes indépendants correspondants ;

Δ_2 est obtenu à partir du déterminant du système en remplaçant les coefficients de x_2 par les termes indépendants correspondants.

2.6.1.7 Conclusions

1. La résolution d'un système linéaire à deux inconnues de façon matricielle est commode si le déterminant du sytème est différent de 0 : on écrit l'équation sous forme matricielle ; on multiplie les deux membres par l'inverse de la matrice du système ; on obtient ainsi les inconnues.

Exemple : Résoudre matriciellement le système

$$\begin{cases} 27x_1 + 15x_2 = -16 \\ 10x_1 - 9x_2 = 11 \end{cases}$$

c'est l'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 27 & 15 \\ 10 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 11 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant de la matrice du système :

$$\begin{vmatrix} 27 & 15 \\ 10 & -9 \end{vmatrix} = -393$$

Puis la matrice inverse de celle du système :

$$\frac{1}{-393}\begin{pmatrix} -9 & -15 \\ -10 & 27 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-393}\begin{pmatrix} -9 & -15 \\ -10 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-393}\begin{pmatrix} -21 \\ 457 \end{pmatrix}$$

Solution : $S = \left\{\frac{21}{393}; -\frac{457}{393}\right\}$

2. **Discussion :** Δ, Δ_1 et Δ_2 étant définis comme ci-avant ;

- Si $\Delta \neq 0$ alors $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ et $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ (droites sécantes)
- Si $\Delta = 0$ et $\Delta_1 = 0$ (ou $\Delta_2 = 0$) alors le système est indéterminé (droites parallèles confondues)
- Si $\Delta = 0$ et $\Delta_1 \neq 0$ (ou $\Delta_2 \neq 0$) alors le système est impossible (droites parallèles disjointes)

2.6.1.8 Exercices

Exercice n° 41

Résoudre matriciellement :

1. $\begin{cases} 5x - 3y = 14 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$ $S = \left\{\frac{21}{10}; -\frac{7}{6}\right\}$

2. $\begin{cases} 3x + 2y - 2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ $S = \left\{\frac{6}{5}; -\frac{4}{5}\right\}$

3. $\begin{cases} 7x+3y-36=0 \\ 11x-5y-8=0 \end{cases}$ $S=\{3;5\}$

4. $\begin{cases} 10x+4y-3=0 \\ 20y-5x-4=0 \end{cases}$ $S=\left\{\frac{31}{30};-\frac{11}{6}\right\}$

5. $\begin{cases} 3x+4y-85=0 \\ 7x-6y+1=0 \end{cases}$ $S=\{11;13\}$

6. $\begin{cases} 3x+5y-42=0 \\ 2y-x-8=0 \end{cases}$ $S=\{4;6\}$

7. $\begin{cases} 21x+8y+66=0 \\ 28x-23y-13=0 \end{cases}$ $S=\{-2;-3\}$

8. $\begin{cases} -5x+7y=17 \\ 3x+y-21=0 \end{cases}$ $S=\{5;6\}$

9. $\begin{cases} \frac{3}{4}x-0,7y=2,1 \\ -0,7x+4,2y=\frac{3}{2} \end{cases}$ $S=\left\{\frac{141}{38};\frac{519}{532}\right\}$

Exercice n° 42

Déterminer le paramètre m pour que les droites $d_1 \equiv 5x-2y=-3$ et $d_2 \equiv mx+m^2y+m^3=0$ (avec $m \neq 0$) soient non sécantes. Pour cette valeur de m, les droites sont-elles parallèles distinctes ou confondues ?

2.6.2 Déterminant et Inversion d'une matrice 3×3

2.6.2.1 Mineurs d'une matrice d'ordre 3

Définition 2.6.2

On appelle **mineur** A^{ij} *de l'élément* a_{ij} *d'une matrice* A *d'ordre 3, le déterminant de la sous-matrice d'ordre 2 obtenue en supprimant la* $i^{\text{ème}}$ *ligne et la* $j^{\text{ème}}$ *colonne de* A *.*

Exemple : Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\3&6&8\\5&9&7\end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 3. La matrice $\begin{pmatrix}1&4\\3&8\end{pmatrix}$ est une sous-matrice d'ordre 2 de la matrice A. Le déterminant $\begin{vmatrix}1&4\\3&8\end{vmatrix}$ de cette sous-matrice est le mineur d'ordre 2 de l'élément a_{32} de la matrice A que l'on notera A^{32}. Le mineur A^{32} de l'élément a_{32} vaut donc -4.

2.6.2.2 Cofacteurs d'une matrice d'ordre 3

Définition 2.6.3

On appelle **cofacteur** *de l'élément* a_{ij} *d'une matrice* A *d'ordre 3 le produit du mineur* A^{ij} *par* $(-1)^{i+j}$*.*

On multiplie le mineur de l'élément a_{ij} par $+1$ ou -1 selon que la somme des indices est paire ou impaire. Le tableau suivant résume la situation pour chaque élément considéré :

$$\begin{pmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{pmatrix}$$

Utilisation : Calculer la *matrice des cofacteurs* de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

remarque : La matrice des cofacteurs est la matrice obtenue en remplaçant chaque élément de A par son cofacteur.

Réponse : $\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2.6.2.3 Exercices

1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculer les mineurs, puis les cofacteurs de a_{12}, a_{33}, a_{21} et a_{22}

2. Même exercice pour

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{pmatrix}$$

2.6.2.4 Matrice adjointe

La matrice adjointe de A (notée adj A) est définie comme la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

2.6.2.5 Déterminant d'une matrice d'ordre 3

Définition 2.6.4

Le déterminant d'un matrice 3×3 *est la somme des produits des éléments d'une ligne (ou d'un colonne) par leurs cofacteurs respectifs.*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Par définition :

$$\begin{array}{rcl} |A| & = & a_{11}.A^{11} + a_{12}.\left(-A^{12}\right) + a_{13}.A^{13} \\ & = & a_{21}.\left(-A^{21}\right) + a_{22}.A^{22} + a_{23}.\left(-A^{23}\right) \end{array}$$

On parle *d'expansion par cofacteurs* ou encore que *le déterminant est développé suivant les éléments de telle ligne ou de telle colonne*.

La valeur du résultat est indépendante du choix de la ligne ou de la colonne.

Exemple : Quel est le déterminant de la matrice A ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution

Suivons le processus décrit ci-dessous :

1. Choisir une rangée ou une colonne de A. Pour l'instant, choisissons la première rangée.

2. Multiplier chacun des éléments de cette rangée par leurs cofacteurs correspondants. Les éléments de la première rangée sont $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, et $a_{13} = 3$ que l'on multiple avec les cofacteurs correspondants, c'est-à-dire C_{11}, C_{12} et C_{13} qui sont

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1[0\cdot(-2) - 2\cdot 0] = 0 \\
C_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} \\
&= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)[1\cdot(-2) - 2\cdot 2] = 6 \\
C_{13} &= (-1)^{1+3} M_{13} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1[1\cdot 0 - 0\cdot 2] = 0
\end{aligned}$$

3. Finalement :

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11}\cdot C_{11} + a_{12}\cdot C_{12} + a_{13}\cdot C_{13} \\
&= 2\cdot 0 + 6\cdot 1 + 3\cdot 0 = 6
\end{aligned}$$

Vérifions si une expansion le long de la deuxième colonne appuierait le résultat précédent. On remarque aisément que le choix de la deuxième colonne est nettement la plus efficace puisque le déterminant sera obtenu du calcul $\det A = a_{12}\cdot C_{12} + a_{22}\cdot C_{22} + a_{32}\cdot C_{32}$ et deux des trois éléments de la $2^{\text{ème}}$ colonne sont nuls. En effet, $a_{12} = 1$, $a_{22} = 0$, et $a_{32} = 0$. Il est ainsi inutile de calculer les cofacteurs C_{22} et C_{32}. Pour sa part, le cofacteur correspondant à a_{12} est

$$\begin{aligned}
C_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} \\
&= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)[1\cdot(-2) - 2\cdot 2] \\
&= 6
\end{aligned}$$

Le déterminant de A est donc

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{12}\cdot C_{12} + a_{22}\cdot C_{22} + a_{32}\cdot C_{32} \\
&= 1\cdot 6 + 0\cdot C_{22} + 0\cdot C_{32} \\
&= 6
\end{aligned}$$

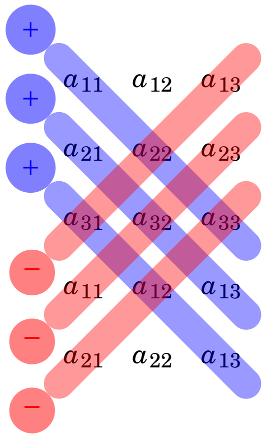
ce qui correspond effectivement à la réponse obtenue par une expansion le long de la première rangée.

2.6.2.6 Règle de SARRUS

Attention 2.6.5

La règle de Sarrus n'est valable que pour les déterminants d'ordre 3 !

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{33}\right) - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{31}\right)$$



Les éléments reliés par la même ligne sont multipliés entre eux, les produits ainsi obtenus sont sommés avec le signe plus pour les lignes descendantes et le signe moins pour les lignes montantes.

2.6.2.7 Exercice

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ a & b & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

2.6.2.8 Propriétés

Ce sont les mêmes que celles évoquées pour les déterminants d'ordre 2.
En reprenant les propriétés 1 et 4 précédentes étendues aux déterminants d'ordre 3, on établit également ceci :

⇒ **Soit** une matrice A d'ordre 3 dont les colonnes sont notées A_i avec $i \in \{1,\ldots,3\}$ et soit la notation

$$\det A = \|A_1, A_2, A_3\|$$

Si $B = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot A_i = a_1 \cdot A_1 + a_2 \cdot A_2 + a_3 \cdot A_3$ (B est appelée combinaison linéaire des colonnes A_i) alors on a respectivement :

1) $$\begin{aligned} \|B, A_2, A_3\| &= \|a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, A_2, A_3\| \\ &= a_1 \|A_1, A_2, A_3\| \\ &\quad + a_2 \|A_2, A_2, A_3\| \\ &\quad\quad + a_3 \|A_3, A_2, A_3\| \\ &= a_1 \|A_1, A_2, A_3\| \\ &= a_1 \det A \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2)\qquad \|A_1,B,A_3\| &= \|A_1, a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3, A_3\| \\
&= a_1\,\|A_1,A_1,A_3\| \\
&\quad +a_2\,\|A_1,A_2,A_3\| \\
&\qquad +a_3\,\|A_1,A_3,A_3\| \\
&= a_2\,\|A_1,A_2,A_3\| \\
&= a_2 \det A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\qquad \|A_1,A_2,B\| &= \|A_1,A_2,a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3\| \\
&= a_1\,\|A_1,A_2,A_1\| \\
&\quad +a_2\,\|A_1,A_2,A_2\| \\
&\qquad +a_3\,\|A_1,A_2,A_3\| \\
&= a_3\,\|A_1,A_2,A_3\| \\
&= a_3 \det A
\end{aligned}
$$

Application : le déterminant de Vandermonde

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

appelons les colonnes C_1,C_2, C_3 et substituons à C_2 la différence $C_2 - C_1$, à C_3 la différence $C_3 - C_1$ pour faire apparaître une ligne avec deux zéros

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

on développe évidemment D suivant les éléments de cette première ligne en ayant pris soin de mettre en évidence le facteur $b-a$ de la deuxième colonne et le facteur $c-a$ de la troisième colonne

$$D = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$D = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Autre exemple :

$$D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$D = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$D = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$D = (a+b+c)^3$$

2.6.2.9 Exercice

Calculer les déterminants en appliquant ces méthodes :

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \\ a & b & c \\ ab & bc & ca \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ a+b & -2b & b+c \\ a+c & c+b & -2c \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a+b & c+d & 1 \\ b+c & a+d & 1 \\ c+a & b+d & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 2a & 0 \\ 2b & 0 & 3a \\ 4b & 3b & 6a \end{vmatrix}$$

2.6.2.10 Inversion matricielle — Méthode

Comme pour les matrices d'ordre 2, on appelle *matrice inverse* de la matrice carrée A d'ordre 3, la matrice, si elle existe, notée A^{-1} telle que :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

obtenue par la relation suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adj\,A$$

Disposition pratique : illustration sur un exemple.

Calculons l'inverse de la matrice

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice est-elle inversible ?

Calculons le déterminant, par exemple en développant suivant les éléments de la première ligne :

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \cdot A^{11} - a_{12} \cdot A^{12} + a_{13} \cdot A^{13} \\ &= 3.(-13) - 2.7 + 1.15 = -38 \end{aligned}$$

Le déterminant de A est non nul, donc A est inversible.

On forme la matrice des mineurs :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 7 \\ 7 & 4 & 5 \\ 15 & 14 & -11 \end{pmatrix}$$

Ecrivons la matrice inverse :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{38} \begin{pmatrix} -13 & -7 & 15 \\ 2 & 4 & -14 \\ 7 & -5 & -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

SCHEMA :

1. calcul de $|A|$; si $|A| \neq 0$, la matrice est inversible ; dès lors
2. matrice des mineurs
3. matrice inverse

2.6.2.11 Exercices

Exercice n° 43

Calculer les inverses des matrices suivantes, si possible :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 44

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est inversible. Et si elle l'est, calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 45

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $r \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que si $A^r = 0_n$, alors $I_n - A$ est inversible et son inverse est $I_n + A + A^2 + \cdots + A^{r-1}$. Calculer ainsi l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 46

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Trouver deux réels a et b tels que $A^2 + aA + bI_2 = 0_2$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}. Vérifier ce résultat avec la formule du cours.

Exercice n° 47

Résoudre les équations suivantes dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$X\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & -2\\1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$$

Exercice n° 48

Résoudre le système d'équations suivant (ses inconnues sont des matrices 2×2) :

$$S\equiv\left\{\begin{array}{ccccc} X & + & Y & = & \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}X & + & Y & = & \begin{pmatrix}1 & -1\\6 & 4\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

2.6.2.12 Résolution matricielle d'un système de Cramer

Soit le système linéaire de trois équations à trois inconnues dans $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3 & = & b_1\\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3 & = & b_2\\ a_{31}\cdot x_1+a_{32}\cdot x_2+a_{33}\cdot x_3 & = & b_3\end{array}\right.$$

de matrice A.

On suppose que $\det A\neq 0$. Donc le système admet une et une seule solution. On peut regarder le système comme exprimant l'égalité de deux matrices colonnes, la première étant le produit $A\cdot X$, le second une matrice B, où

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\text{ et }B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

Cette égalité est $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

On désigne par A^{-1} l'inverse de A (qui est inversible puisque $|A|\neq 0$) et multiplions par A^{-1} à gauche les deux membres de l'égalité :

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$$

Puisque $A^{-1}A=I$ et à cause de l'associativité de la multiplication matricielle, on peut écrire successivement :

$$\begin{array}{rcl}(A^{-1}A)X & = & A^{-1}B\\ I.X & = & A^{-1}B\\ X & = & A^{-1}B\end{array}$$

Cette égalité de matrices colonnes permet de calculer x_1, x_2 et x_3. La résolution du système de Cramer revient donc au calcul de $A^{-1}B$.

Méthode :

On écrit le système sous la forme $A.X = B$;on résout en X : $X = A^{-1}B$; on calcule A^{-1} et on le multiplie par B ; de l'égalité $A^{-1}.B = X$, on tire les valeurs de x_1, x_2, x_3.

Exemple :

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 18 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 36 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

qui s'écrit $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 10 \end{pmatrix}$

Ayant calculé le déterminant du système et la matrice inverse, on trouve :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{-60} \begin{pmatrix} -8 & 4 & -12 \\ 13 & -14 & -3 \\ -14 & -8 & -6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-60} \begin{pmatrix} -120 \\ -300 \\ -600 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où : $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ et $x_3 = 10$

2.6.2.13 Exercice

Résoudre les systèmes :

1) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 21 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 29 \\ x_1 + 3x_2 + 30x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 53 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 31 \end{cases}$

2.7 Exercices Complémentaires

1. Effectuer le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\cdots4 \\ j=1\cdots3}}$ avec $a_{ij} = i + j$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 2$. Ecrire A.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & m^2 \\ m & 12m \end{pmatrix}$ où m est un nombre réel. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle singulière ? Ecrire A pour $m = -2$ et rechercher A^{-1}

4. Même question avec $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

5. On donne $A = \begin{pmatrix} -15 & 3-3x \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. A quelle condition sur x peut-on écrire $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

6. Etudier quelle transformation subit la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si on la multiplie :

- à droite par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- à droite par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- à droite par $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- à droite par $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Calculer les déterminants suivants en les transformant d'abord par substitution, à une rangée, d'une combinaison linéaire de cette rangée et des rangées parallèles :

$$\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ b & a+b & ab \\ a+b & a & ab \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & b-a & b \\ b+c & c-b & c \\ c+a & a-c & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} bc & 1 & a \\ ca & 1 & b \\ ab & 1 & c \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}$$

8. Si les éléments d'un déterminant sont des polynômes en x, le déterminant lui-même est un polynôme en x. On vérifie si un réel en est une racine comme on le fait pour les polynômes.

(a) démontrer que le polynôme
$P(x) = \begin{vmatrix} x-1 & x & x+1 \\ x & x+1 & x-1 \\ x+1 & x-1 & x \end{vmatrix}$ a pour racine 0 ; quel est le degré de ce polynôme ? Calculer ses racines.

(b) déterminer m de manière que le polynôme $P(x) = \begin{vmatrix} x-1 & x & x+2 \\ x+1 & x & x-2 \\ x+3 & x-1 & x-m \end{vmatrix}$ soit divisible par $x-3$; quel est le degré de ce polynôme ? quelles sont ses racines ?

9. Mes deux voisins, M. Durand et M. Latrace ont le même abonnement d'électricité. Deux tarifs sont distingués suivant l'heure de la journée : « heures pleines » et « heures creuses ». En juin, M. Durand a consommé 1500 kWh en heures pleines et 1000 kWh en heures creuses. Il a dépensé 162,5 euros . Quant à M. Latrace, pour la même période, il a payé 153,84 euros pour une consommation en heures pleines de 800 kWh et en heures creuses de 2000 kWh. Retrouvez le prix exact d'un kWh pour chaque tarification.

10. Trois grues effectuent le déchargement d'un navire, chacune avec sa vitesse de transbordement propre. Cette vitesse représente le volume de marchandise déchargée par unité de temps. Pour vider complètement le navire, il faut 6 jours si elles travaillent toutes les trois ensemble de façon ininterrompue. Par contre, si seulement la première et la deuxième fonctionnent, il faudra 12 jours. Enfin si l'on fait travailler d'abord la première seule pendant 10 jours, le déchargement peut ensuite être terminé en 2 jours par la première et la troisième travaillant ensemble. On demande le nombre de jours nécessaires à chaque grue pour effectuer le déchargement toute seule.

Solution : Il faudra 12/5 de jours à la première grue pour décharger seule le navire, 72 jours à la deuxième et 12 jours à la troisième.