L'objectif d'une approximation affine est de simplifier l'étude locale des fonctions en remplaçant une fonction donnée par une approximation plus simple : une droite. Cette méthode repose sur l'idée que, dans un voisinage très restreint d'un point donné, une fonction dérivable peut être approchée par une fonction du premier degré.

Intuition géométrique

L'idée intuitive derrière cette approximation est qu'en "zoomant" suffisamment sur le graphe de f autour du point a, la courbe devient pratiquement identique à une droite, celle de sa tangente. Cette propriété permet de simplifier des problèmes non linéaires complexes en les ramenant à des problèmes linéaires plus faciles à analyser.

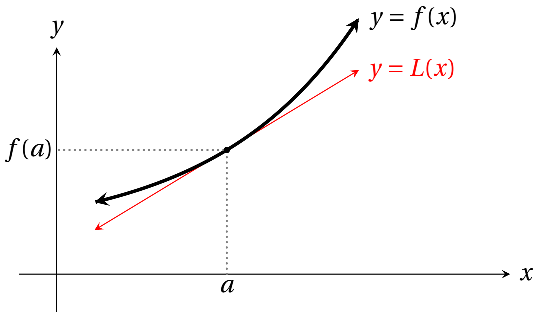
Tangente et approximation du premier degré

Pour une fonction f, dérivable en un réel a, l'approximation affine est donnée par la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$. Cette tangente représente une droite dont l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

où :

- $f(a)$ est la valeur de la fonction au point a,
- $f'(a)$ est la dérivée de f en a, qui correspond à la pente de la tangente.



Applications pratiques

L'approximation affine est largement utilisée :

- Pour estimer des valeurs d'une fonction lorsque les calculs exacts sont difficiles.
- Dans le développement de Taylor, où elle représente le premier ordre de l'approximation.

Développement théorique

Proposition 1 *Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $a \in I$.*

- *Il existe une fonction φ telle que pour tout réel h avec $a+h \in I$:*

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + h \cdot \varphi(h) \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

- *La fonction $h \longmapsto f(a) + h \cdot f'(a)$ est une approximation affine de f pour h proche de 0.*

Preuve 1 — *Pour $h \neq 0$, on pose*

$$\varphi(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

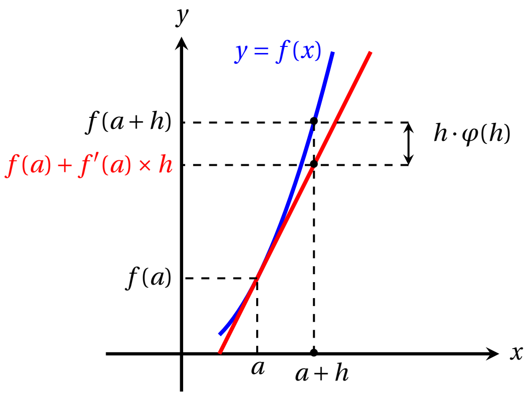
f étant dérivable en a, nous allons démontrer que lorsque h tend vers 0, la fonction $\varphi(h)$ tend également vers 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \varphi(h) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h \to 0} f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De plus, $h \cdot \varphi(h) = f(a+h) - f(a) + hf'(a)$ soit

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h \cdot \varphi(h)$$

— *Nous pouvons faire une approximation de f par une fonction du premier degré en h. Pour ce faire, référons-nous à l'illustration ci-dessus.*



Pour des valeurs h proches de 0 :

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a) \cdot h$$

◇ **Exemple :** Calculons une valeur approchée de $(2,03)^3$ sans utiliser notre calculatrice.

$$\begin{aligned}(2,03)^3 &= (2+0,03)^3 \\ &\cong 2^3 + 0,03.3.2^2 \\ &= 8 + 0,03.12 \\ &= 8,36\end{aligned}$$

Vérifier cette approximation en utilisant une calculatrice

◇ **Exemple :** Déterminer une approximation affine de $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de 1, et donner une valeur approchée de $\sqrt{1,002}$ et de $\sqrt{0,998}$.
Au voisinage de 1, on a $f(1+h) \approx f(1) + h \cdot f'(1) \approx 1 + 0,5 \cdot h$.

— Pour $\sqrt{1,002}$, on a $h = 0,002$, d'où $\sqrt{1,002} \approx 1 + 0,5 \times 0,002 \approx 1,001$.

— Pour $\sqrt{0,998}$, on a $h = -0,002$, d'où $\sqrt{0,998} \approx 1 - 0,5 \times 0,002 \approx 0,999$.

Exercices

1 Soit la fonction $f(x) = x^2$

(a) **Analyse** :

i. Indiquer l'expression analytique de $f(a+h)$ puis développer celle-ci

ii. Rechercher l'approximation affine de $f(a+h)$

iii. Comparer les points précédents et indiquer l'erreur commise

iv. Comment choisir h pour que la précision de cette approximation affine soit de 10^{-6}

(b) **Application numérique** : quelle est l'approximation affine de $(0,9999)^2$ et quelle est l'erreur commise ?

2 (a) Montrer avec la définition, que la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$; déterminer $f'(x)$.

(b) Calculer sans calculatrice une valeur approchée de $\dfrac{1}{2,0002}$ (penser à une approximation affine).

3 Calcule la valeur approchée des valeurs suivantes par **approximation affine**.

$$(1,002)^2 \qquad \sqrt[3]{26,9} \qquad \sqrt{15,98} \qquad \sqrt{48,9997}$$