# Combinatoire

F. Lancereau

26 novembre 2024

# Introduction à la combinatoire

- **Le dénombrement** consiste à compter des objets.
- Pour réussir efficacement et rapidement, il est essentiel de suivre une **méthode rigoureuse** plutôt que de compter de façon désordonnée.
- L'**analyse combinatoire** regroupe justement les techniques utilisées pour **compter les éléments** d'un ensemble de manière structurée.

# Exercices typiques

- Combien de façons de distribuer 17 cadeaux à 5 enfants ?
- Combien d'anagrammes d'un mot donné ?
- Combien de combinaisons possibles pour former une équipe de 11 personnes parmi 25 ?
- Nombre de chemins dans un quadrillage $m \times n$ en allant du coin inférieur gauche au coin supérieur droit.

# Définitions fondamentales

**Définition**

Le **cardinal** d'un ensemble $A$ est le nombre d'éléments contenus dans $A$.

On le note : $\text{card}(A)$ ou $\#A$.

**Exemple**

Si $A$ désigne l'ensemble des cartes d'un jeu de 32 cartes, alors $\#A = 32$.

**Remarque**

On dit qu'un ensemble $A$ est **fini** si $\text{card}(A)$ n'est pas infini.

# Techniques de dénombrement

**Principe d'addition**

Lorsque plusieurs événements sont **mutuellement exclusifs**, le nombre total de cas est la somme des cas possibles pour chaque événement.

**Exemple**

Dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées.

Je peux donc y choisir un livre de $20 + 10 = 30$ façons différentes.

# Techniques de dénombrement

**Principe de multiplication**

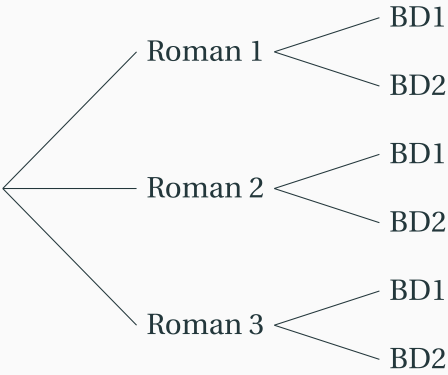
Lorsque plusieurs événements sont indépendants, le nombre total de cas est le produit des cas possibles pour chaque événement.

Le nombre de façons de prendre un élément dans $A$ et un élément dans $B$ est égal à $\#(A \cap B) = \#A \times \#B$ ou plus simplement $n \times m$

**Exemple**

Dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées. Je souhaite prendre un livre de chaque sorte. Il y a donc $20 \times 10 = 100$ possibilités.

# Arbre illustrant le principe de multiplication




pour trois romans et deux BDs!!!

# Combinatoire : *la factorielle d'un nombre naturel*

**Définition**

La **factorielle** d'un entier $n$, noté $n!$, est le produit des $n$ premiers entiers naturels non nuls : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$

**Exemple**

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

**Remarque**

Par convention $0! = 1$

# Combinatoire : *la factorielle d'un nombre naturel*

**Définition**

La **factorielle** d'un entier $n$, noté $n!$, est le produit des $n$ premiers entiers naturels non nuls : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$

**Exemple**

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

**Remarque**

Par convention $0! = 1$

astuce : $n! = n \times (n-1)! \quad \text{pour } n \geq 1 \overset{n=1}{\Longrightarrow} 1! = 1 \times (1-1)! = 1 \times 0! \Longrightarrow 1 = 0!$

# AAR : *Arrangements avec répétition* (p-liste)

**Chaque élément peut être choisi plusieurs fois**

$$\mathrm{B}_n^p = n^p$$

**Example**

Un digicode à 4 chiffres est une 4-liste de l'ensemble $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

La 4-liste {1 ;1 ;1 ;0} est différente de la 4-liste {0 ;1 ;1 ;1}.

$\rightarrow$ *Il y a* $B_{10}^4 = 10^4 = 10\,000$ *possibilités pour un digicode composé de 4 chiffres.*

# AAR : *Arrangements avec répétition* (p-liste)

**Example**

A l'aide des six chiffres : 2, 3, 5, 6, 7, 9 :

1. combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?

# AAR : *Arrangements avec répétition* (p-liste)

**Example**

A l'aide des six chiffres : 2, 3, 5, 6, 7, 9 :

1. combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?
   → *Par le principe de multiplication (ou arrangement avec répétitions) : 6 chiffres possibles pour les centaines, puis 6 chiffres possibles pour les dizaines et enfin 6 chiffres possibles pour les unités :* $B_6^3 = 6^3 = 216$

# AAR : *Arrangements avec répétition* (p-liste)

**Example**

A l'aide des six chiffres : 2, 3, 5, 6, 7, 9 :

1. combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?
   → *Par le principe de multiplication (ou arrangement avec répétitions) : 6 chiffres possibles pour les centaines, puis 6 chiffres possibles pour les dizaines et enfin 6 chiffres possibles pour les unités :* $B_6^3 = 6^3 = 216$
2. combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?

# AAR : *Arrangements avec répétition* (p-liste)

**Example**

A l'aide des six chiffres : 2, 3, 5, 6, 7, 9 :

1. combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?
   → *Par le principe de multiplication (ou arrangement avec répétitions) : 6 chiffres possibles pour les centaines, puis 6 chiffres possibles pour les dizaines et enfin 6 chiffres possibles pour les unités :* $B_6^3 = 6^3 = 216$
2. combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?
   → *le chiffre 2 ou le chiffre 3 doit occuper la position des centaines :*
   $6^2 + 6^2 = 2 \cdot 6^2 = 72$

## ASR : *Arrangements sans répétition*

### Ordre important, éléments distincts

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

### Example

Le podium d'une course à 20 participants est un arrangement constitué du premier arrivé, puis du deuxième et enfin du troisième.

$$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840.$$

→ *Il y a donc 6 840 podiums possibles pour une course à 20 participants.*

# PSR : *Permutations sans répétitions*

### Arrangements de $n$ éléments sans condition particulière

$$\mathrm{P}_n = n!$$

### Example

12 (n) patineurs participent à un championnat de patinage artistique individuel.

Combien d'ordres de présentation de leurs 12 numéros sont possibles ?

$$\mathrm{P}_{12} = 12! = 12 \times 11 \times \cdots \times 2 \times 1 = 479\,001\,600$$

# PSR : *Permutations sans répétitions*

**Example**

1. Cinq chevaux font la course. Combien y a-t-il d'arrivées possibles (on suppose qu'il ne peut pas y avoir d'*ex-æquo*).
   → *Une arrivée est une permutation de l'ensemble des cinq chevaux. Il y a donc* $P_5 = 5! = 120$ *quintés possibles avec 5 chevaux donnés.*

# PSR : *Permutations sans répétitions*

**Example**

1. Cinq chevaux font la course. Combien y a-t-il d'arrivées possibles (on suppose qu'il ne peut pas y avoir d'*ex-æquo*).
   $\rightarrow$ *Une arrivée est une permutation de l'ensemble des cinq chevaux. Il y a donc* $P_5 = 5! = 120$ *quintés possibles avec 5 chevaux donnés.*
2. 7 acteurs présentent une pièce comportant 7 rôles différents. De combien de manières peut-on faire la distribution ?
   $\rightarrow$ ***ordre important*** *(rôles différents) -* ***pas de répétition*** *(un acteur pour un rôle) - permutation de 7 éléments distincts* $P_7 = 7! = 5040$

# PAR : *Permutations avec répétition*

### Cas où certains éléments se répètent

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

### Example

Jules a 6 enfants et 6 balles : une balle bleue, deux balles rouges et trois balles vertes. De combien de manières peut-il donner une balle à chaque enfant ?

$\rightarrow$ $n = 6$ *balles :* $n_1 = 1$ *de type "bleue",* $n_2 = 2$ *de type "rouge" et* $n_3 = 3$ *de type "verte".*

*Le nombre de façons de procéder est donc égal à* $\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{720}{6\cdot 2\cdot 1} = 60.$

# PAR : *Permutations avec répétition*

**Example**

Quel est le nombre d'anagrammes formées avec les lettres des mots ANAGRAMME ?

- *En distinguant les trois A et les deux M, le nombres de permutations est* $9!$.

# PAR : *Permutations avec répétition*

**Example**

Quel est le nombre d'anagrammes formées avec les lettres des mots ANAGRAMME ?

- *En distinguant les trois A et les deux M, le nombres de permutations est* $9!$.
- *Mais permuter les trois A et deux M ne modifie pas le mot …*
  *il y a donc* $3!$ *permutations en trop et* $2!$ *permutations en trop.*

# PAR : *Permutations avec répétition*

**Example**

Quel est le nombre d'anagrammes formées avec les lettres des mots ANAGRAMME ?

- *En distinguant les trois A et les deux M, le nombres de permutations est* $9!$.
- *Mais permuter les trois A et deux M ne modifie pas le mot …*
  *il y a donc* $3!$ *permutations en trop et* $2!$ *permutations en trop.*
- *On "tue" l'ordre engendré par ces permutations en divisant par* $3!$ *et puis* $2!$.

# PAR : *Permutations avec répétition*

**Example**

Quel est le nombre d'anagrammes formées avec les lettres des mots ANAGRAMME ?

- *En distinguant les trois A et les deux M, le nombres de permutations est* $9!$.
- *Mais permuter les trois A et deux M ne modifie pas le mot ...*
  *il y a donc* $3!$ *permutations en trop et* $2!$ *permutations en trop.*
- *On "tue" l'ordre engendré par ces permutations en divisant par* $3!$ *et puis* $2!$.
- *Permutation avec répétitions :* $\dfrac{9!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2!} = 30240$

# CSR : *Combinaisons sans répétition*

## Choix de $p$ éléments parmi $n$, ordre non important

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

*autre notation* : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ *ex.* : $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\times 2!} = \frac{5\times 4}{2} = 10 = C_{10}^3$

## Example

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

→ *Une rencontre entre deux équipes correspond à choisir deux équipes parmi les huit*

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!\times 6!} = \frac{8\times 7}{2} = 28$$

# Résumé

| | Ordre | Modèle | Exemples |
|---|---|---|---|
| $p$-liste | oui | tirage avec remise | digicode |
| Permutation | oui | tirage sans remise | anagramme |
| Arrangement $\mathrm{A}_n^p$ | oui | tirage sans remise | podium d'une course |
| Combinaison $C_n^p$ | non | tirage sans remise | main dans un jeu de cartes |