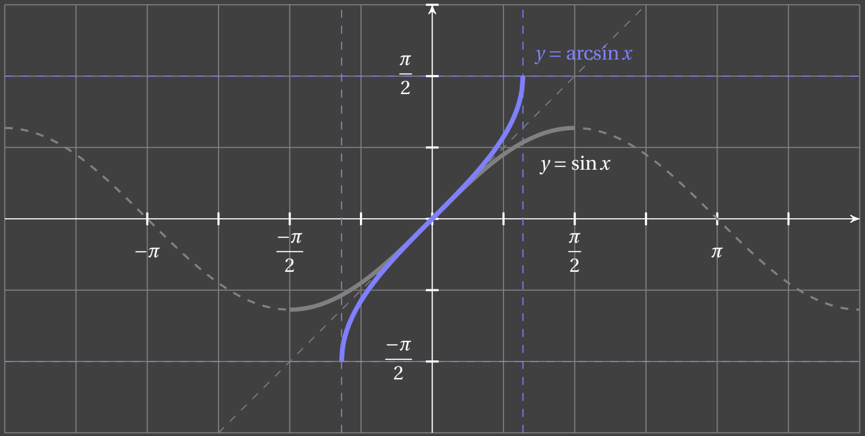
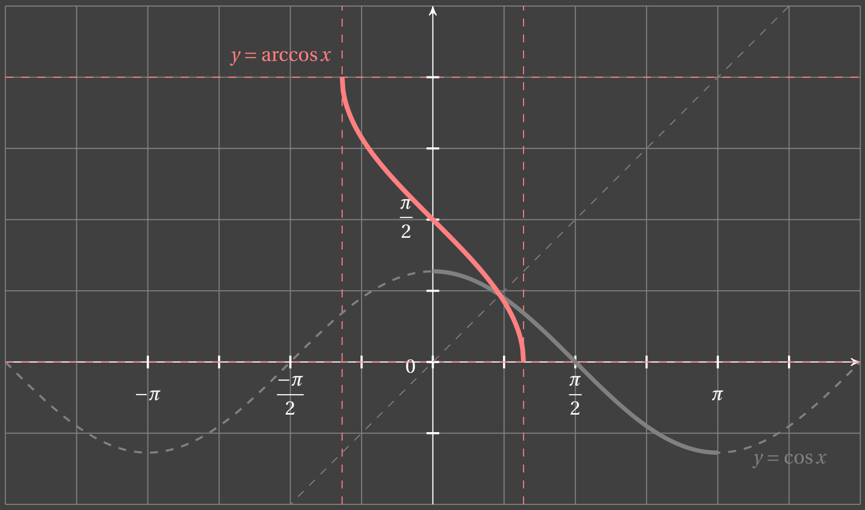
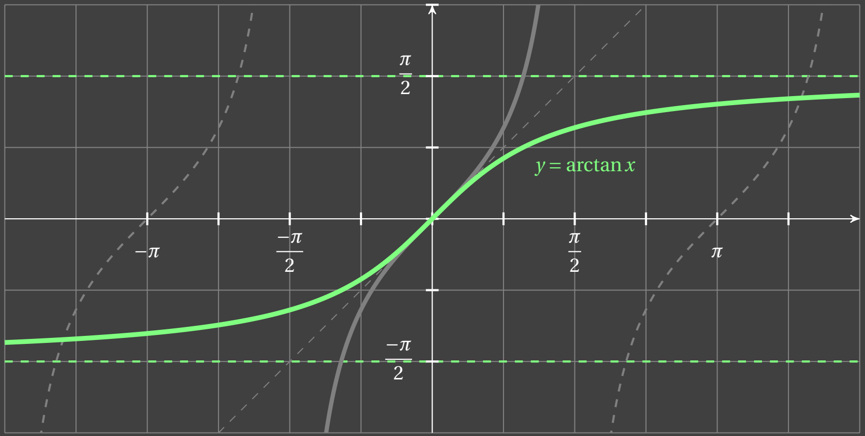
Cyclométriques

F. Lancereau

4 novembre 2024


$y = \arcsin x$
$y = \sin x$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{-\pi}{2}$
$-\pi$
$\frac{-\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π


$y = \arccos x$
$\frac{\pi}{2}$
0
$-\pi$
$\frac{-\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$y = \cos x$


$\frac{\pi}{2}$
$y = \arctan x$
$-\pi$
$\frac{-\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{-\pi}{2}$

Domaines de définition

- $\mathbf{dom}\ \arcsin = \mathbf{dom}\ \arccos = [-1,1]$
- $\mathbf{dom}\ \arctan = \mathbb{R}$

Exemple

- domaine de $\quad f : x \mapsto \arccos\left(1-x^2\right)$
- CE : $-1 \leq 1-x^2 \leq 1 \iff \begin{cases} 1-x^2 \geq -1 \iff 2-x^2 \geq 0 \overset{TS}{\iff} x \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}] \\ 1-x^2 \leq 1 \iff -x^2 \leq 0 \iff x^2 \geq 0 \iff x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Ces deux conditions doivent être rencontrées en même temps :

$$\mathbf{dom}\, f = \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$$

Domaines de définition

Exemple

- domaine de $\quad f : x \mapsto \sqrt{\arctan^2 x - \frac{\pi^2}{9}}$
- CE : $\arctan^2 x - \frac{\pi^2}{9} \geq 0 \iff \left(\arctan x - \frac{\pi}{3}\right)\left(\arctan x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\arctan x - \frac{\pi}{3}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\arctan x + \frac{\pi}{3}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\arctan^2 x - \frac{\pi^2}{9}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\textbf{dom}\, f = \left]-\infty ; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3} ; \infty\right[$$

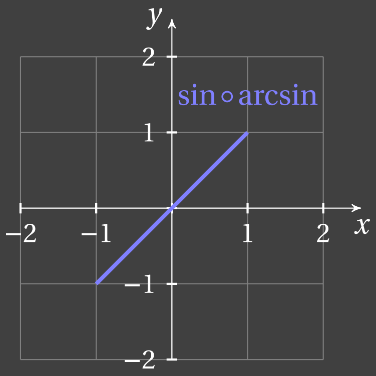
Ensembles images

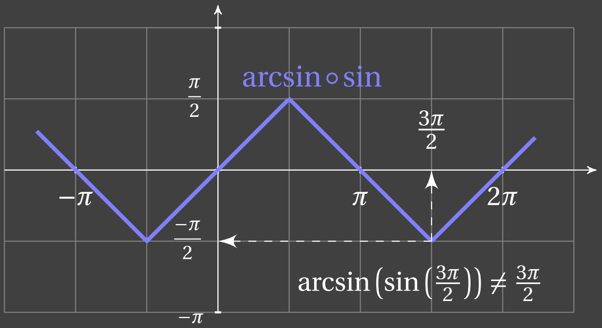
- $\mathbf{im}\ \arcsin = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\mathbf{im}\ \arccos = [0, \pi]$
- $\mathbf{im}\ \arctan = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exemple

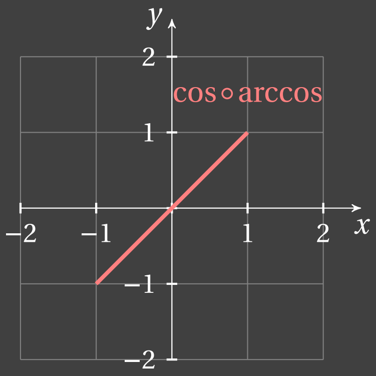
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto 2\arccos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\forall x \in [-2;2] \quad : \quad & 0 \leq \arccos\left(\frac{x}{2}\right) \leq \pi \\
& 0 \leq 2\arccos\left(\frac{x}{2}\right) \leq 2\pi \\
& -\frac{\pi}{2} \leq 2\arccos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \implies \mathbf{im}\, f = \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

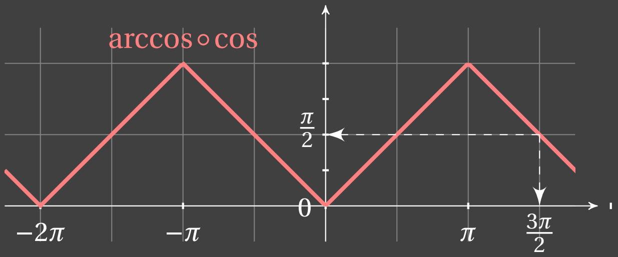




- $\forall x \in [-1\,;\,1] \;:\; (\sin\circ\arcsin)(x) = \sin(\arcsin(x)) = x$
- $\forall x \in [-\pi/2\,;\,\pi/2] \;:\; (\arcsin\circ\sin)(x) = \arcsin(\sin(x)) = x$
- attention! $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; (\arcsin\circ\sin)(x) = \arcsin(\sin(x)) \neq x$



$$\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \neq \frac{3\pi}{2}$$



- $\forall x \in [-1\,;\,1]\ :\ (\cos \circ \arccos)\,(x) = \cos\,(\arccos(x)) = x$
- $\forall x \in [0\,;\,\pi]\ :\ (\arccos \circ \cos)\,(x) = \arccos\,(\cos(x)) = x$
- attention! $\forall x \in \mathbb{R}\ :\ (\arccos \circ \cos)\,(x) = \arccos\,(\cos(x)) \neq x$

Résolution d'équation

- La résolution d'une équation cyclométrique implique l'élimination des fonctions cyclométriques par une fonction trigonométrique appropriée, menant à la fonction identité.
- Il est essentiel de définir des conditions d'existence et de résolution, et de valider chaque solution dans l'équation initiale.

Exemple

Résoudre $\arcsin(2x) = \frac{\pi}{4} + \arcsin(x)$

- CE : $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- CR : $\arcsin(2x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\frac{\pi}{4} + \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Résolution d'équation

Exemple

CR : l'équation impose

$$\begin{cases} \arcsin(2x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi}{4} + \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ x \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{cases} \iff x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

la solution, si elle existe, doit appartenir à l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right] \approx [-0{,}35\ ;\ 0{,}5]$

Résolution d'équation

Exemple

résolution proprement dite :

$$
\begin{aligned}
\arcsin(2x) = \frac{\pi}{4} + \arcsin(x) &\iff \sin(\arcsin(2x)) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin(x)\right) \\
&\iff 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\arcsin(x)) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\arcsin(x)) \\
&\iff \cdots \qquad (\dashrightarrow \textit{tableau}) \\
&\iff x = \frac{1}{\sqrt{2(5-2\sqrt{2})}} \approx 0,48
\end{aligned}
$$

on a $0,48 \in [-0{,}35\,;\ 0{,}5]$ et l'ensemble de solutions est $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2(5-2\sqrt{2})}} \right\}$

Résolution d'équation

Exemple

Résoudre $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$

- Condition d'existence : Aucune $\Longrightarrow x \in \mathbb{R}$
- $\tan(\arctan(2x) + \arctan(3x)) = \tan\frac{\pi}{4} \iff \frac{2x+3x}{1-2x\cdot 3x} = 1$

$$\iff 5x = 1 - 6x^2$$

$$\iff (x+1)(6x-1) = 0$$

Vérification : $\arctan(-2) + \arctan(-3) < 0$ à rejeter ($\frac{\pi}{4}$ positif!)

$\arctan(2/6) + \arctan(3/6) = \arctan(1/3) + \arctan(1/2) = \frac{\pi}{4}$

Solution finale : $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$