

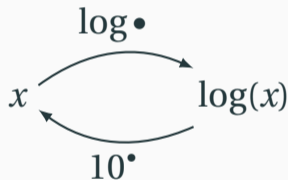
Logarithmes et Applications

F. Lancereau

20 octobre 2024

Définition des Logarithmes

Le logarithme décimal d'un **nombre réel strictement positif** x , noté $\log(x)$, est l'exposant auquel il faut élever 10 pour obtenir x .



Exemple

$$\log(100) = 2 \text{ car } 10^2 = 100$$

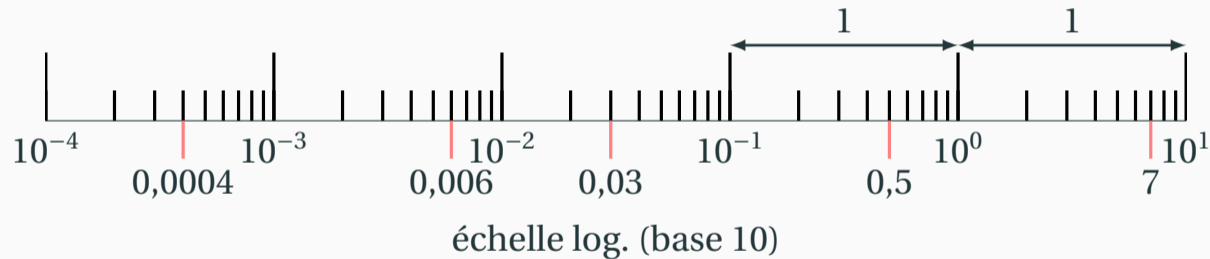
Définition des Logarithmes

Les logarithmes permettent de manipuler plus facilement des nombres très grands ou très petits.

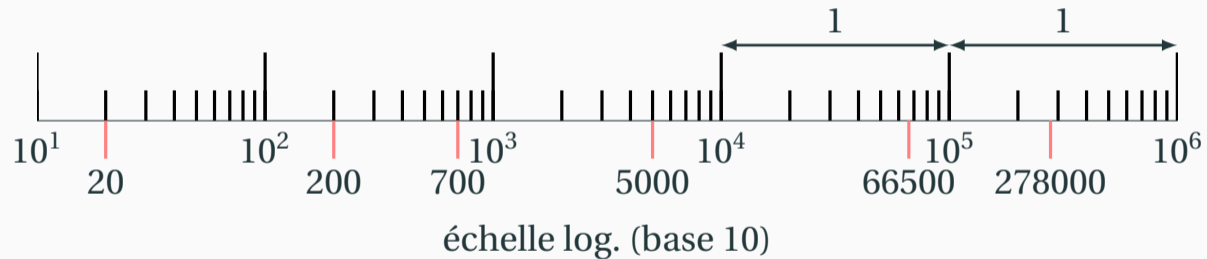
Exemple

Il est plus simple de manipuler 9 puisque $9 = \log(1\,000\,000\,000)$ que de travailler directement avec le nombre 1 000 000 000.

Logarithmes et échelles réduites



Logarithmes et échelles réduites



Propriété de la multiplication

La formule $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ simplifie la multiplication de grands nombres.

Exemple

$$\log(100 \times 1000) = \log(100) + \log(1000) = 2 + 3 = 5$$

La démonstration de cette formule sera présentée plus tard.

Applications aux décibels

L'échelle des décibels est basée sur une échelle logarithmique :

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

où I est l'intensité du son en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ et I_0 le seuil d'audibilité (intensité au-dessous de laquelle on n'entend pas le son). *Note* : $I_0 = 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$

Exemple

Si l'intensité sonore double, l'augmentation en décibels est de 3 dB.

Applications aux décibels

Preuve

on remplace I par $2 \times I$ dans la formule :

$$\begin{aligned}L' &= 10 \log\left(\frac{2 \times I}{I_0}\right) = 10 \left(\log(2) + \log\left(\frac{I}{I_0}\right)\right) \\ &= 10 \log(2) + 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \\ &\approx 3 + 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 3 + L \quad \implies L' = L + 3\end{aligned}$$

Applications au pH

Le pH d'une solution est également basé sur une échelle logarithmique :

$$\text{pH} = -\log([H_3O^+])$$

où la concentration en ions oxonium $[H_3O^+]$ est exprimée en moles par litres.

Exemple

Si la concentration en ions $[H_3O^+]$ est multipliée par 10, le pH diminue d'une unité.

Applications au pH

Preuve

on remplace $[H_3O^+]$ par $10 \times [H_3O^+]$ dans la formule :

$$\begin{aligned} \text{pH}_{\text{new}} &= -\log(10 \times [H_3O^+]) = -\log(10) - \log([H_3O^+]) \\ &= -1 - \log([H_3O^+]) \\ &= -1 + \text{pH} \quad \implies \text{pH}_{\text{new}} = \text{pH} - 1 \end{aligned}$$

le pH est bien diminué d'une unité!

Avantages des logarithmes

Applications pratiques des logarithmes

- Les logarithmes permettent de manipuler facilement des valeurs très grandes ou très petites en les réduisant sur une échelle plus simple.
- Ils sont utilisés dans des domaines variés : physique (décibels), chimie (pH), économie, etc.

Calculer le nombre de décibel d'une source sonore ayant une intensité de 10^{-4} watts par mètre carré?

$$L = 10 \log \left(\frac{10^{-4}}{10^{-12}} \right) = 10 \log(10^8) = 80 \text{ dB}$$

Acidité d'une solution

En ajoutant une solution basique à du vinaigre, on obtient une concentration en H_3O^+ 6000 fois plus petite que la concentration initiale. Comment cette manipulation agit-elle sur le pH?

$$\begin{aligned}\text{pH} &= -\log \frac{[H_3O^+]}{6000} = -\left(\log [H_3O^+] - \log 6000\right) \\ &= -\log [H_3O^+] + \log 6000 \\ &= -\log [H_3O^+] + 3,778\end{aligned}$$

Le pH de la solution augmentera de près de 3,78 unités

Acidité d'une solution

Pour que le pH d'une solution augmente de 4,2, comment doit-on agir sur la concentration en H_3O^+ de cette solution?

$$\begin{aligned} \text{pH} + 4,2 &= -\log [H_3O^+] + 4,2 \\ &= -\log [H_3O^+] + \log(10^{4,2}) \\ &= -\left(\log [H_3O^+] - \log(10^{4,2})\right) \\ &= -\log \frac{[H_3O^+]}{10^{4,2}} = -\log \left(\frac{[H_3O^+]}{15848}\right) \end{aligned}$$

La concentration en H_3O^+ est environ 16000 fois inférieure!