Racines n-ième dans $\mathbb{C}$

$6^{\text{ème}}$ Math 6h/s

F. Lancereau

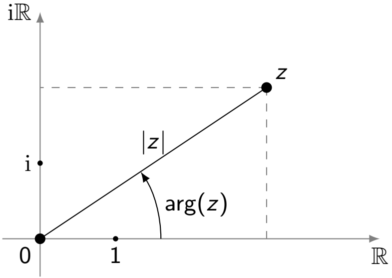
19 septembre 2024

Argument d'un nombre complexe

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$. Un **argument** de z est un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \qquad \text{On note } \theta = \arg(z)$$



Égalité de deux nombres complexes (FT)

- Les arguments θ et θ' sont dits identiques non pas parce que leurs valeurs sont strictement égales mais quand leurs valeurs sont égales à 2π près.

  On dit : θ et θ' sont égaux modulo 2π
- $\theta = \theta' \pmod{2\pi} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \;\; \theta' = \theta + 2k\pi$
- $3\pi/2 = -\pi/2 \pmod{2\pi}$ car $3\pi/2 = -\pi/2 + 2\pi$
- $-705° = 15° \pmod{360°}$ car $-705° = 15° - 2 \times 360°$

Par conséquent :

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Racines n-ième

Définition

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, une racine n-ième est un $w \in \mathbb{C}$ tel que

$$\boxed{w^n = z}$$

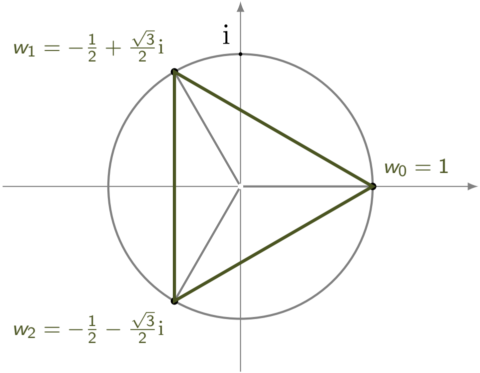
Les racines n-ièmes $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ de $z = |z|.\text{cis}(\theta)$ sont les n complexes :

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

Racines cubiques de l'unité

- On recherche les racines cubiques w_0, w_1, w_2 du nombre complexe $z = 1$
- $|z| = 1$ et $\theta = \arg(z) = 0$
- $w_k = \sqrt[3]{1} \cdot \text{cis}\left(\dfrac{0 + 2k\pi}{3}\right) \quad (k = 0, 1, 2)$

$$\begin{cases} k = 0 & \Longrightarrow & w_0 = 1.\text{cis}(0) = 1 \\ k = 1 & \Longrightarrow & w_1 = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ k = 2 & \Longrightarrow & w_2 = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

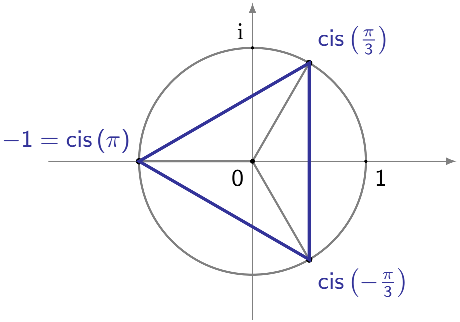


Racines cubiques de $-1 \in \mathbb{C}$

$z = -1 = \operatorname{cis}(\pi)$ et $n = 3$

Racines 3$^{\text{ième}}$ de -1 :

$$\left\{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right)\right\} = \left\{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), -1, \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$



Racines 5ème de l'unité