Les fonctions continues

Nous allons approfondir notre compréhension des fonctions continues.

- Pour déterminer si une fonction continue est injective, nous devons examiner sa monotonie sur son domaine.
- Une fonction continue qui est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur un intervalle est injective sur cet intervalle, car à chaque élément distinct du domaine correspond un élément distinct de l'ensemble d'arrivée.

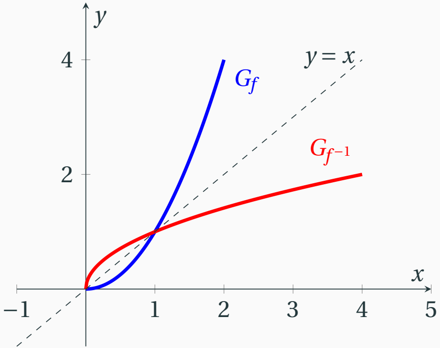
Les fonctions injectives

Une fois établi qu'une fonction est injective :

- elle est aussi bijective sur son image, et donc elle admet une fonction réciproque.
- cette fonction réciproque 'inverse' la fonction originale, permettant de retrouver l'élément original du domaine à partir de son image.
- Comprendre ces notions est crucial pour aborder les fonctions cyclométriques et logarithmiques.

Symétrie 1ère bissectrice

soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x^2$



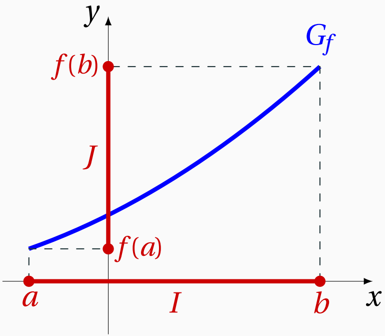
sa réciproque fonctionnelle est $\quad f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\ ;\ x \mapsto \sqrt{x}$

Fonctions Continues et Injectivité

Dans l'étude des fonctions continues, la monotonie et l'**injectivité** jouent des rôles clés pour aborder les **fonctions réciproques**.

Monotonie

Une fonction f est dite monotone sur un intervalle si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur cet intervalle. La monotonie d'une fonction continue peut être vérifiée en étudiant le signe de sa dérivée.

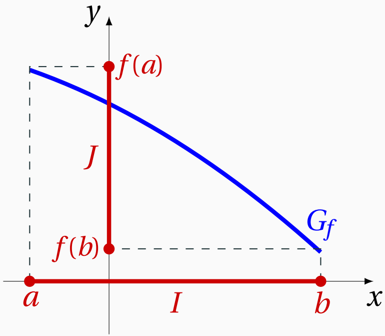


$I = [a, b]$ et $J = f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

f continue, strictement croissante

Monotonie

Une fonction f est dite monotone sur un intervalle si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur cet intervalle. La monotonie d'une fonction continue peut être vérifiée en étudiant le signe de sa dérivée.

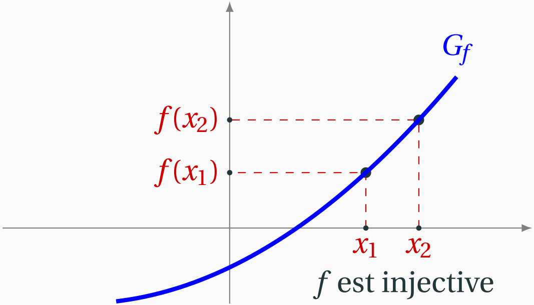


$$I = [a, b] \text{ et } J = f([a, b]) = [f(b), f(a)]$$

f continue, strictement décroissante

Injectivité

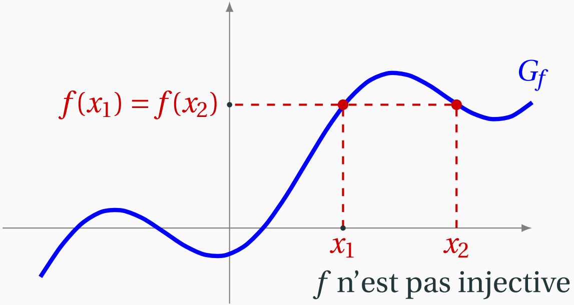
Une fonction est **injective** si, à chaque élément différent du domaine, correspond un élément différent de l'ensemble d'arrivée. Pour une fonction continue, la monotonie sur un intervalle implique l'injectivité sur cet intervalle.



f est injective

Injectivité

Une fonction est **injective** si, à chaque élément différent du domaine, correspond un élément différent de l'ensemble d'arrivée. Pour une fonction continue, la monotonie sur un intervalle implique l'injectivité sur cet intervalle.



Fonctions Réciproques

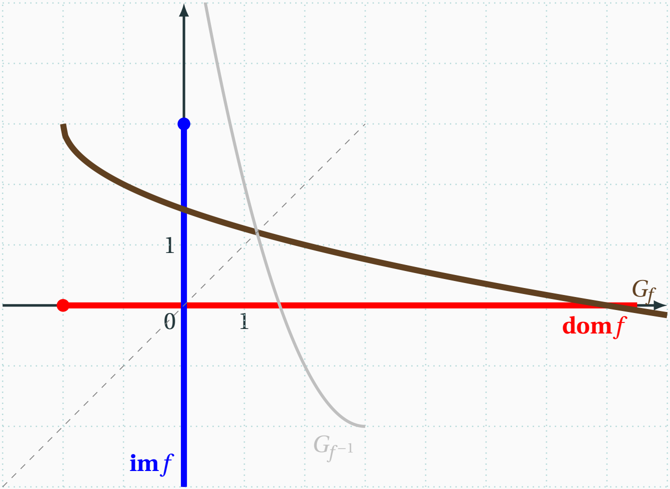
- Si une fonction est injective, elle est bijective sur son image et admet alors une **fonction réciproque**. Cette réciproque permet de retrouver l'élément du domaine à partir de son image par la fonction originale.
- Une fonction continue et monotone sur un intervalle est toujours injective sur cet intervalle, permettant ainsi l'existence d'une fonction réciproque qui "annule" l'effet de la fonction originale.

Exemple

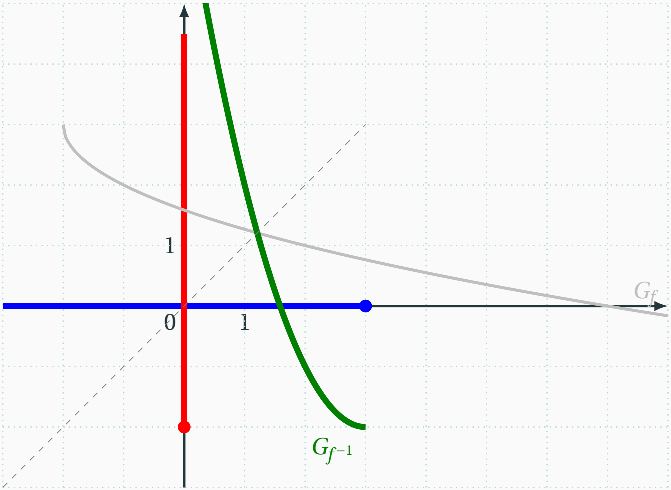
Soit la fonction $f(x) = 3 - \sqrt{x+2}$. Détermine l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée, l'expression analytique et le graphe de la fonction réciproque f^{-1}.

1. $\mathbf{dom}\, f = [-2\,;+\infty[$ est-elle **continue** ? est-elle **injective** ?
2. $x \geq -2 \longrightarrow x+2 \geq 0 \xrightarrow{\sqrt{\bullet}} \sqrt{x+2} \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} -\sqrt{x+2} \leq 0 \xrightarrow{+3} f(x) \leq 3$
   donc $\mathbf{im}\, f =]-\infty\,;3]$
3. $y = 3 - \sqrt{x+2} \implies x = 3 - \sqrt{y+2} \iff \sqrt{y+2} = 3 - x \iff y+2 = (3-x)^2$
   $\iff y = (3-x)^2 - 2$
4. IMPORTANT : $f : [-2\,;+\infty[\,\rightarrow\,]-\infty\,;3]\,;\; x \mapsto 3 - \sqrt{x+2}$
5. IMPORTANT : $f^{-1} :]-\infty\,;3] \rightarrow [-2\,;+\infty[\,;\; x \mapsto (3-x)^2 - 2$

$f : [-2\,;+\infty[\to]-\infty\,;3]\,;\ x \mapsto 3 - \sqrt{x+2}$



$f^{-1} :]-\infty;3] \to [-2;+\infty[\ ;\ x \mapsto (3-x)^2 - 2$



Théorème des fonctions réciproques

Une fonction numérique f **continue et injective** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ définit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$;

Elle admet donc une application réciproque définie sur J, appelée fonction réciproque de f. On dit que f admet une fonction réciproque.

Théorème des fonctions réciproques

Exemple

Soit la fonction $h : [-1,2] \to \mathbb{R}; x \mapsto x^4 + 2x^3$

- elle est continue sur $I = [-1;2]$;
- sa dérivée, $h' : x \mapsto 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3)$ est strictement positive sur l'intervalle I (sauf au point isolé 0) ;
- cette fonction est donc strictement croissante sur I;
- h satisfait aux hypothèses du Théorème des fonctions réciproques;
- la fonction réciproque de h existe ; h^{-1} est définie sur $h\Big([-1;2]\Big) = [-1;32]$