1 7 acteurs présentent une pièce comportant 7 rôles différents. De combien de manières peut-on faire la distribution ?

Solution: ordre important (rôles différents) - pas de répétition (un acteur pour un rôle) - permutation de 7 éléments distincts $P_7 = 7! = 5040$

2 Une pièce de théâtre se présente comme un dialogue entre un homme et une femme. Comment faire le choix si la troupe se compose de 5 hommes et six femmes ?

Solution: combinaison sans répétition : ordre sans importance – pas de répétition - principe de multiplication : on choisit 1 homme parmi 5 et puis 1 femme parmi 6 : $C_5^1 \cdot C_6^1 = 5 \cdot 6 = 30$

3 Lors d'un concours, 3 prix différents sont distribués et 20 personnes ont participé. De combien de façons peut-on répartir les 3 prix si une même personne peut éventuellement emporter plusieurs prix ?

Solution: ordre important (3 prix différents) - répétitions (une même personne peut éventuellement emporter plusieurs prix) - arrangement avec répétitions : $B_{20}^3 = 20^3 = 8000$

4 Même question si une même personne ne peut recevoir qu'au plus un prix.

Solution: arrangement sans répétition : $A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = 6840$

5 Combien de «mots» de 3 lettres peut-on former avec les lettres du mot «FORET» ?

Solution: ordre important et répétitions permises puisqu'on forme un mot à partir des 5 lettres différentes déterminées dans l'énoncé (il y a répétition puisqu'on va chercher des lettres dans un alphabet réduit à 5 lettres différentes et qu'un mot peut contenir plusieurs lettres identiques) : $B_5^3 = 5^3 = 125$

6 Un régisseur de théâtre doit composer une équipe de trois éclairagistes en choisissant parmi 10 candidats. Combien de choix différents peut-il faire ?

Solution: l'ordre n'est pas important car l'équipe est formée de postes identiques et il ne peut y avoir répétition puisque les candidats ne peuvent être clonés. Combinaison sans répétition : $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$

7 Lors d'un héritage, on doit répartir 3 beaux meubles différents entre les 5 enfants du défunt. De combien de façons peut-on faire la distribution si chaque enfant ne reçoit pas plus d'un meuble ?

Solution: Arrangement sans répétitions - ordre important (meubles différents) et pas de répétitions (au plus un meuble par enfant) : $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$

8 Combien y a-t-il de de nombres paires de 4 chiffres ?

Solution: Principe de multiplication : 9 chiffres possibles pour les milliers (de 1 à 9, 0 exclu) et puis 10 chiffres possibles pour les centaines, 10 chiffres possibles pour les dizaines et enfin 5 chiffres possibles pour les unités (0,2,4,6,8) pour que le nombre soit divisible par 2. Au total : $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$

9 Dans une classe de 10 élèves, les professeurs désirent attribuer un prix d'excellence, un prix du travail et un prix de politesse (rien n'interdit qu'un même élève ait plusieurs prix). De combien de façons peuvent-ils faire leur choix ?

Solution: arrangement avec répétition car ordre important (prix différents) et répétitions permises puisque rien n'interdit qu'un même élève ait plusieurs prix : $B_{10}^3 = 10^3 = 1000$

10 Même question s'il est hors de question que l'élève A ait le prix du travail.

Solution: Il est préférable de recourir au principe de multiplication : $10 \cdot 9 \cdot 10 = 900$ (10 élèves possibles pour le prix d'excellence, 9 pour le prix du travail et 10 pour le prix de politesse)

11 De combien de manières différentes une société de 10 membres peut-elle choisir un groupe de 3 membres pour effectuer un voyage ?

Solution: Combinaison sans répétition (ordre sans importance car on ne peut différencier le rôle de chacun des membres et pas de répétition puisque qu'une personne ne peut être choisie qu'une seule fois) :

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$$

12 De combien de manières différentes une société de 10 membres peut-elle élire un président, un secrétaire et un trésorier ?

Solution: Arrangement sans répétition (ordre important car les membres sélectionnés ont des postes différents et pas de répétition puisque qu'une personne ne peut être choisie qu'une seule fois) :

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720$$

13 Combien peut-on délivrer de plaques d'immatriculation comportant :

(a) 3 lettres, suivies de 2 chiffres dont le premier est différent de 0 ?

Solution:

Chaque position parmi les 3 lettres a 26 possibilités. Le total des combinaisons pour les lettres est donc :

$$26 \times 26 \times 26 = 26^3 = 17\,576$$

Le premier chiffre a 9 possibilités, et le deuxième chiffre a 10 possibilités. Le total des combinaisons pour les chiffres est donc :

$$9 \times 10 = 90$$

Le nombre total de plaques possibles est donné par :

$$26^3 \times 90 = 17\,576 \times 90 = 1\,581\,840$$

(b) 5 signes, dont 4 chiffres et une lettre différente de M et P (la lettre occupant une position quelconque) ?

Solution:

— La plaque comporte 5 signes, dont 4 chiffres et 1 lettre.
— Les chiffres peuvent être de 0 à 9, donc il y a 10 choix pour chaque chiffre.
— La lettre doit être différente de M et P, donc il reste $26-2=24$ lettres possibles.
— La lettre peut occuper n'importe quelle des 5 positions parmi les 5 signes.
— Chaque chiffre a 10 choix possibles. Le nombre total de combinaisons pour les 4 chiffres est donc donné par :

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$$

— Nombre de combinaisons pour la lettre : La lettre a 24 choix possibles, puisqu'elle doit être différente de M et P.
— Position de la lettre : La lettre peut se placer dans 5 positions différentes parmi les 5 signes.

Le nombre total de plaques possibles est obtenu en multipliant :

$$\textit{Total} = \textit{Combinaisons des chiffres} \times \textit{Combinaisons des lettres} \times \textit{Positions possibles pour la lettre}$$

$$\text{Total} = 10\,000 \times 24 \times 5 = 1\,200\,000$$

(c) 3 lettres différentes de M et P, suivies d'un nombre de 4 chiffres quelconques ?

Solution: Total des plaques possibles $= 24 \times 23 \times 22 \times 10^4 = 121\,440\,000$

14 De combien de manières peut-on tirer 8 cartes d'un jeu de 32 cartes, si les 8 cartes comprennent exactement 1 as, 1 roi, 1 dame et 1 valet ?

Solution: Étape 1 : Choisir 1 as, 1 roi, 1 dame, et 1 valet Comme avant, nous choisissons 1 carte de chaque groupe :

— Nombre de façons de choisir 1 as : $\binom{4}{1} = 4$,
— Nombre de façons de choisir 1 roi : $\binom{4}{1} = 4$,
— Nombre de façons de choisir 1 dame : $\binom{4}{1} = 4$,
— Nombre de façons de choisir 1 valet : $\binom{4}{1} = 4$.

Ainsi, le nombre total de façons de choisir 1 as, 1 roi, 1 dame, et 1 valet est :

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256.$$

Étape 2 : Choisir 4 cartes parmi les 16 restantes :

Après avoir choisi les 4 cartes (1 as, 1 roi, 1 dame, 1 valet), il reste $32-16=16$ cartes, constituées uniquement des 7, 8, 9, et 10 de chaque couleur.

Nous devons choisir 4 cartes parmi ces 16 cartes. Le nombre de façons de faire cela est donné par :

$$\binom{16}{4} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1820.$$

Au final, le nombre total de façons de tirer 8 cartes comprenant exactement 1 as, 1 roi, 1 dame, et 1 valet, et 4 autres cartes parmi les 16 restantes, est donné par :

$$256 \times 1820 = 465920.$$

Il y a 465 920 façons de tirer 8 cartes dans ces conditions.

15 Déterminez la valeur de n pour laquelle $C_{2n}^{1} + C_{2n}^{2} + C_{2n}^{3} = 387 \cdot n$

Solution: $C_{2n}^{1} + C_{2n}^{2} + C_{2n}^{3} = 387 \cdot n$ se réécrit :

$$
\begin{aligned}
&2n + \tfrac{2n(2n-1)}{2} + \tfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 387n \\
\iff\ & 2n + n(2n-1) + \tfrac{1}{3}n(2n-1)(2n-2) = 387n \\
\iff\ & n(2 + (2n-1) + \tfrac{1}{3}(2n-1)(2n-2)) = 387n \\
\iff\ & n(4n^2 - 1156) = 0 \\
\iff\ & n = 0 \text{ ou } n^2 = 289 \\
\iff\ & n = 0 \text{ ou } n = 17 \text{ ou } n = -17
\end{aligned}
$$

Finalement, $n = 17$ puisque $n \in \mathbb{N}_0$