1 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2 - 6z + 10 = 0$

Solution: $z = 3 + \mathbf{i}$, $z = 3 - \mathbf{i}$

(b) $z^2 + z + 1 = 0$

Solution: $z = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = -\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $z^2 - \mathbf{i}\sqrt{2}z - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Solution: $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}$, $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}$

(d) $(2+\mathbf{i})\,z^2 - (5-\mathbf{i})\,z + 2 - 2\mathbf{i} = 0$

Solution: $\rho_{\mathbb{C}} = (-(5-\mathbf{i}))^2 - 4\,(2+\mathbf{i})\,(2-2\mathbf{i}) = -2\mathbf{i}$

$$\mathrm{RCC}\left(\rho_{\mathbb{C}}\right) = \pm\,(1-\mathbf{i}) \text{ et } z = \frac{(5-\mathbf{i}) \pm (1-\mathbf{i})}{4+2\mathbf{i}}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{1 - \mathbf{i}\,;\, \tfrac{4}{5} - \tfrac{2}{5}\mathbf{i}\right\}$$

2 Vérifiez que $5 + \mathbf{i}$ est solution de $z^2 - 10z + 26 = 0$ puis déterminez la deuxième solution.

Solution: On substitue $z = 5 + \mathbf{i}$ dans l'équation et on vérifie si celle-ci est satisfaite.

$(5+\mathbf{i})^2 - 10\,(5+\mathbf{i}) + 26 = 10\mathbf{i} + 24 - 10\,(5+\mathbf{i}) + 26 = 10\mathbf{i} + 24 - 50 - 10\mathbf{i} + 26 = 24 - 50 + 26 = 0$

Méthode somme-produit : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \iff 5 + \mathbf{i} + z_2 = 10$

L'autre solution est donc $z_2 = 5 - \mathbf{i}$.

3 L'équation $2z^2 - (7-2\mathbf{i})z + k = 0$ admet $1+\mathbf{i}$ comme solution. Déterminez k puis la deuxième solution de l'équation.

Solution: $2\,(1+\mathbf{i})^2 - (7-2\mathbf{i})\,(1+\mathbf{i}) + k = 0 \iff k = 9 + \mathbf{i}$

Méthode somme-produit : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \iff 1 + \mathbf{i} + z_2 = \frac{7-2\mathbf{i}}{2}$

L'autre solution est $z_2 = \frac{5-4\mathbf{i}}{2}$.

4 L'équation $z^2 + (-3+2\mathbf{i})z + k - \mathbf{i} = 0$ où $k \in \mathbb{R}$ admet $1 + \mathbf{i}$ comme solution. Déterminez k et la deuxième solution de l'équation.

Solution:
$$\begin{aligned}(1+\mathbf{i})^2 + (-3+2\mathbf{i})\,(1+\mathbf{i}) + k - \mathbf{i} = 0 &\iff (1+i)^2 + (-5-i) + k - i = 0\\ &\iff 2i + (-5-i) + k - i = 0\\ &\iff k = 5\end{aligned}$$

Méthode somme-produit : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \iff 1 + \mathbf{i} + z_2 = 3 - 2\mathbf{i}$

L'autre solution est $z_2 = 2 - 3\mathbf{i}$.

5 L'équation $z^2 + (p+5\mathbf{i})z + q(2-\mathbf{i}) = 0$ admet $1 + 2\mathbf{i}$ comme solution. Déterminez p et q ainsi que l'autre solution de l'équation.

Solution: $(1+2\mathbf{i})^2 + (p+5\mathbf{i})\,(1+2\mathbf{i}) + q(2-\mathbf{i}) = 0$

Il faut réécrire le membre de gauche de l'équation sous sa forme algébrique. Nous allons développer chaque terme en séparant les parties réelles et imaginaires, puis les combiner. Résultat :

$$(1+2\,\mathbf{i})^2+(p+5\,\mathbf{i})\,(1+2\,\mathbf{i})+q(2-\mathbf{i})=0 \iff (p-13+2q)+(9+2p-q)\,\mathbf{i}=0$$

Un nombre complexe est nul lorsque sa partie réelle et imaginaire sont nulles :

$$\begin{cases} p-13+2q=0 \\ 9+2p-q=0 \end{cases}$$

Les solutions du système sont :

$$p=-1, \quad q=7.$$

L'autre solution de l'équation z_2 vérifie : $z_1+z_2=-\frac{b}{a} \iff 1+2\,\mathbf{i}+z_2=1-5\,\mathbf{i}$

La valeur de z_2 est : $z_2=-7\,\mathbf{i}$