Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a deux formes :
- forme algébrique : $z = a + bi$
- forme trigonométrique : $z = |z| \operatorname{cis}\theta$ avec $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\tan\theta = \frac{b}{a}$ (faire un schéma !)
- **notation** : $\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\ \sin\theta$
- et aussi : $\operatorname{cis}(0) = 1$ et $\operatorname{cis}(90°) = i$

Propriétés : Pour tout réel θ et θ', et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a :
1. $\operatorname{cis}(\theta) \cdot \operatorname{cis}(\theta') = \operatorname{cis}(\theta + \theta')$
2. $\frac{\operatorname{cis}(\theta)}{\operatorname{cis}(\theta')} = \operatorname{cis}(\theta - \theta')$
3. $\overline{\operatorname{cis}(\theta)} = \operatorname{cis}(-\theta)$

Formules de Moivre

La formule de *de Moivre* permet de calculer facilement la puissance n-ième d'un nombre complexe en utilisant la formule :
$$\operatorname{cis}(\theta)^n = \operatorname{cis}(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
c'est-à-dire : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Trigonométrie : formules de duplication

On peut retrouver les formules bien connues $\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$ et $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ de la manière suivante :
$$\begin{aligned}
(\operatorname{cis} x)^2 = \operatorname{cis} 2x \quad \text{(de Moivre)} \quad &\iff (\cos x + i\sin x)^2 = \cos 2x + i\sin 2x \\
&\iff (\cos^2 x - \sin^2 x) + (2\sin x\cos x)i = \cos 2x + i\sin 2x \\
&\iff \begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2\sin x\cos x \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercices

1 Écrire z sous sa forme trigonométrique $|z|\cdot\operatorname{cis}\theta$. On impose le radian comme unité de mesure d'angle.

(a) $z = -5$

(b) $z = \mathbf{i}^3$

(c) $z = 1 + \mathbf{i}\cdot\tan(\beta)$ avec $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

2 Soit $z = \dfrac{(1-\sqrt{3}\,\mathbf{i})^4\cdot(-\sqrt{3}-3\,\mathbf{i})^5}{(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathbf{i})^8}$. Ecrire z sous forme algébrique $a + b\,\mathbf{i}$.

3 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\mathbf{1}.\ z_1 = (2+2\mathbf{i})^6 \qquad \mathbf{2}.\ z_2 = \left(\frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1-\mathbf{i}}\right)^{20} \qquad \mathbf{3}.\ z_3 = \frac{(1+\mathbf{i})^{2000}}{(\mathbf{i}-\sqrt{3})^{1000}}.$$

4 Calcule le module et l'argument du nombre complexe $\left(\dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}\right)^3$

5 Calculer $\left(\dfrac{-1+\mathbf{i}\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^{343}$. La réponse sera indiquée sous forme algébrique.