Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a deux formes :

- forme algébrique : $z = a + bi$
- forme trigonométrique : $z = |z| \operatorname{cis}\theta$ avec $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\tan\theta = \frac{b}{a}$ (faire un schéma !)
- **notation** : $\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\,\sin\theta$
- et aussi : $\operatorname{cis}(0) = 1$ et $\operatorname{cis}(90°) = i$

Propriétés : Pour tout réel θ et θ', et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a :

1. $\operatorname{cis}(\theta) \cdot \operatorname{cis}(\theta') = \operatorname{cis}(\theta + \theta')$
2. $\frac{\operatorname{cis}(\theta)}{\operatorname{cis}(\theta')} = \operatorname{cis}(\theta - \theta')$
3. $\overline{\operatorname{cis}(\theta)} = \operatorname{cis}(-\theta)$

Formules de Moivre

La formule de *de Moivre* permet de calculer facilement la puissance n-ième d'un nombre complexe en utilisant la formule :

$$\operatorname{cis}(\theta)^n = \operatorname{cis}(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c'est-à-dire : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Trigonométrie : formules de duplication

On peut retrouver les formules bien connues $\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$ et $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
(\operatorname{cis} x)^2 = \operatorname{cis} 2x \quad \text{(de Moivre)} \quad &\iff (\cos x + i\sin x)^2 = \cos 2x + i\sin 2x \\
&\iff (\cos^2 x - \sin^2 x) + (2\sin x\cos x)i = \cos 2x + i\sin 2x \\
&\iff \begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2\sin x\cos x \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercices

1 Écrire z sous sa forme trigonométrique $|z|\cdot\operatorname{cis}\theta$. On impose le radian comme unité de mesure d'angle.

(a) $z = -5$

Solution: le module : $|z| = |-5| = 5$,

l'argument : $\arctan\left(\frac{0}{-5}\right) = 0$ et l'image de z est à l'intersection du deuxième et troisième quadrant $\Longrightarrow \theta = \pi$ ou $180°$

d'où $z = 5\cdot\operatorname{cis}\pi$ ou $z = 5\cdot\operatorname{cis}(180°)$

(b) $z = \mathbf{i}^3$

Solution: $\mathbf{i}^3 = \mathbf{i}^2\cdot\mathbf{i} = -\mathbf{i} = \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$ ou $\operatorname{cis} -\frac{\pi}{2}$ (faire un schéma !)

(c) $z = 1 + \mathbf{i}\cdot\tan(\beta)$ avec $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

Solution: $z = 1 + \mathbf{i}\cdot\tan(\beta) = 1 + \mathbf{i}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{\cos\beta}\left(\cos\beta + \mathbf{i}\cdot\sin\beta\right) = \frac{1}{\cos\beta}\cdot\operatorname{cis}\beta$

on note que $\frac{1}{\cos\beta} > 0$ car $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

donc : $|z| = \frac{1}{\cos\beta}$ et $\arg(z) = \beta \mod 2\pi$

2 Soit $z = \dfrac{(1-\sqrt{3}\,\mathbf{i})^4 \cdot (-\sqrt{3}-3\,\mathbf{i})^5}{(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathbf{i})^8}$. Ecrire z sous forme algébrique $a + b\,\mathbf{i}$.

Solution: $1-\sqrt{3}\,\mathbf{i}$ est dans le 4eme quad. :

$r_1 = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$ et $\theta_1 = \arg(1-\sqrt{3}\,\mathbf{i}) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$

En élevant à la puissance 4 : $(1-\sqrt{3}\,\mathbf{i})^4 = 2^4\operatorname{cis}(4\times(-\pi/3)) = 16\operatorname{cis}(2\pi/3)$ ou $16\operatorname{cis}120°$

de même : $-\sqrt{3}-3\,\mathbf{i} = 2\sqrt{3}\operatorname{cis}(-2\pi/3)$ (attention : $-\sqrt{3}-3\,\mathbf{i}$ est dans le 3eme quad.!!!)

et $(-\sqrt{3}-3\,\mathbf{i})^5 = 288\sqrt{3}\operatorname{cis}(5\times(-2\pi/3)) = 288\sqrt{3}\operatorname{cis}(2\pi/3)$

pour le dénominateur : $-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathbf{i}$ est dans le 2eme quadrant et on a

$$(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathbf{i})^8 = (2\operatorname{cis}(3\pi/4))^8 = 256\operatorname{cis}(2\pi) = 256$$

réponse finale :

$$\begin{aligned} z = \frac{16\times 288\sqrt{3}\operatorname{cis}(2\pi/3+2\pi/3)}{256} &= 18\sqrt{3}\operatorname{cis}(4\pi/3) \\ &= 18\sqrt{3}\left(-1/2-\sqrt{3}/2\,\mathbf{i}\right) \\ &= -9\sqrt{3}-27\,\mathbf{i} \end{aligned}$$

3 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\mathbf{1.}\ z_1 = (2+2\mathbf{i})^6 \qquad \mathbf{2.}\ z_2 = \left(\frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1-\mathbf{i}}\right)^{20} \qquad \mathbf{3.}\ z_3 = \frac{(1+\mathbf{i})^{2000}}{(\mathbf{i}-\sqrt{3})^{1000}}.$$

Solution:

1. Pour $z_1 = (2+2i)^6$, on utilise la forme trigonométrique.

   On a $2+2i = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}(\pi/4)$, donc
   $$z_1 = (2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\tfrac{\pi}{4}\right))^6 = 2^6\cdot 2^3\cdot\operatorname{cis}\left(6\cdot\tfrac{\pi}{4}\right) = 2^9\cdot\operatorname{cis}\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = 2^9\cdot(-\mathbf{i}) = -512\cdot\mathbf{i}.$$

2. Pour $z_2 = \left(\frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1-\mathbf{i}}\right)^{20}$, on calcule d'abord la forme trigonométrique du numérateur et du dénominateur.

   On a :
   $$\frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1-\mathbf{i}} = \frac{2\left(\frac{1}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2}\cdot\frac{\operatorname{cis}(\pi/3)}{\operatorname{cis}(-\pi/4)} = \sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(\tfrac{7\pi}{12}\right).$$

   Donc,
   $$\begin{aligned} z_2 = \left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\tfrac{7\pi}{12}\right)\right)^{20} &= 2^{10}\operatorname{cis}\left(\tfrac{140\pi}{12}\right) \\ &= 2^{10}\operatorname{cis}\left(\tfrac{35\pi}{3}\right) \\ &= 2^{10}\operatorname{cis}\left(\tfrac{5\pi}{3}\right) \\ &= 2^{10}(1-\mathbf{i}\sqrt{3}) \\ &= 512-512\cdot\mathbf{i}\cdot\sqrt{3} \end{aligned}$$

3. Pour $z_3 = \frac{(1+\mathbf{i})^{2000}}{(\mathbf{i}-\sqrt{3})^{1000}}$, on utilise également la forme trigonométrique. On a :
   $$(1+\mathbf{i})^{2000} = 2^{1000}\operatorname{cis}(2000\cdot\pi/4) = 2^{1000}\operatorname{cis}(500\cdot\pi) = 2^{1000},$$

car cis(500π) revient à une rotation complète de multiples de 2π, ce qui est équivalent à 1.

De même,

$$(\mathbf{i}-\sqrt{3})^{1000} = 2^{1000}\text{cis}\left(1000\cdot\tfrac{5\pi}{6}\right) = 2^{1000}\text{cis}\left(5000\cdot\tfrac{\pi}{6}\right).$$

Donc,

$$z_3 = \frac{2^{1000}}{2^{1000}\text{cis}\left(5000\cdot\frac{\pi}{6}\right)} = \text{cis}\left(-5000\cdot\tfrac{\pi}{6}\right) = \text{cis}\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$$

4 Calcule le module et l'argument du nombre complexe $\left(\dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}\right)^3$

Solution:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}\right)^3 &= \left(\frac{(1+\mathbf{i}\sqrt{3})^2}{4}\right)^3 \\
&= \frac{(1+\mathbf{i}\sqrt{3})^6}{64} \\
&= \frac{2^6\mathbf{cis}^6\frac{\pi}{3}}{64} \\
&= \mathbf{cis}\,(2\pi) \\
&= 1
\end{aligned}$$

5 Calculer $\left(\dfrac{-1+\mathbf{i}\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^{343}$. La réponse sera indiquée sous forme algébrique.

Solution: $\left(\frac{-1+\mathbf{i}\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^{343} = \left(\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^{343} = \text{cis}\left(343\cdot\frac{2\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1+\mathbf{i}\sqrt{3}$