**Exploration des Domaines d'Existence des Fonctions Cyclométriques**

Rappels :
- domaines : dom (arcsin) = dom (arccos) = $[-1,1]$ et dom (arctan) = $\mathbb{R}$
- racines : $\arcsin x = 0 \iff x = 0$, $\arccos x = 0 \iff x = 1$ et $\arctan x = 0 \iff x = 0$

**Méthode par l'exemple** :
- Pour rechercher le *domaine de définition* de $f : x \mapsto \arccos\left(1-x^2\right)$, il suffit de poser la condition d'existence suivante
$$-1 \leq 1-x^2 \leq 1$$
Cette double inéquation se décompose en deux inéquations simples, formant le système suivant :
$$\begin{cases} 1-x^2 \geq -1 \\ 1-x^2 \leq 1 \end{cases}$$
Pour résoudre ce système, nous examinons chaque inéquation individuellement.
  1. $1-x^2 \geq -1 \iff 2-x^2 \geq 0 \overset{TS}{\iff} x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$   $TS$ = Tableau de signes
  2. $1-x^2 \leq 1 \iff -x^2 \leq 0 \iff x^2 \geq 0 \iff x \in \mathbb{R}$

  Ces deux conditions doivent être rencontrées en même temps : $x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \cap \mathbb{R}$
  Finalement, dom $f = \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$
- Pour rechercher les *racines* éventuelles de $f$ :
$$\arccos\left(1-x^2\right) = 0 \overset{\text{rappels}}{\iff} 1-x^2 = 1 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

**1** Déterminer les domaines de définition dom $f$ et de continuité $\text{dom}_c\ f$ des fonctions cyclométriques suivantes. Rechercher également les racines éventuelles.

**Remarque :** toutes les fonctions reprisent ici sont continues sur leur domaine d'existence. Donc $\text{dom}_c\ f$ = dom $f$ (le domaine de continuité de la fonction est identique à son domaine d'existence).

(a) $f : x \mapsto \arcsin(1-2x)$

**Solution:** CE : $-1 \leq 1-2x \leq 1 \implies$ dom $f = [0;1]$ et $\text{dom}_c\ f = [0;1]$
racine de $f$ : $\arcsin(1-2x) = 0 \iff 1-2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

(b) $f : x \mapsto \arccos(2x+3)$

**Solution:** CE : $-1 \leq 2x+3 \leq 1 \implies$ dom $f = [-2;-1]$ et $\text{dom}_c\ f = [-2;-1]$
racine de $f$ : $\arccos(2x+3) = 0 \iff 2x+3 = 1 \iff x = -1$

(c) $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

**Solution:** dom $f = \text{dom}_c\ f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
racine de $f$ : $\arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 0 \iff \dfrac{x-1}{x+1} = 0 \iff x-1 = 0 \iff x = 1$

(d) $f : x \mapsto \arcsin\left(x^2-2x\right)$

**Solution:** CE : $-1 \leq x^2-2x \leq 1 \implies$ dom $f = \left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$ et $\text{dom}_c\ f = \left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$
racines de $f$ : $\arcsin\left(x^2-2x\right) \iff x^2-2x = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$

(e) $f : x \mapsto \arccos\left(1-2x-x^2\right)$

**Solution:** Énoncé du devoir.

(f) $f : x \mapsto \dfrac{\arccos \frac{x}{2}}{\arctan x}$

**Solution:** CE : $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \iff -2 \leq x \leq 2$

et $\arctan x \neq 0 \iff x \neq 0$

domaine de défintion : $\operatorname{dom} f = [-2\,;2] \setminus \{0\}$

pour les racines de la fonction, il faut résoudre $\arccos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

rappel : $\arccos x = 0 \iff x = 1$

$$\arccos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \iff \frac{x}{2} = 1 \iff x = 2$$

La fonction $f$ admet une seule racine : $x = 2$

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \arccos\left(2x^2 - x\right)$

**Solution:** CE : $\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \leq 0 \\ 2x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-1/2\,;1] \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ d'où **dom** $f = [-\frac{1}{2}\,;1]$

racine de $f$ : $x = -1/2$ ou $x = 1$

**2** Quelle est le domaine de définition de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \arcsin(1 - \arccos x)$ ? Les bornes du domaine seront données au millième près.

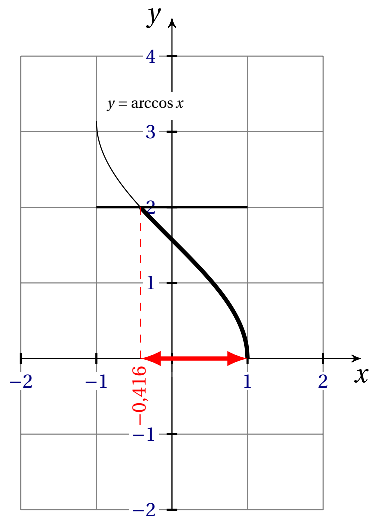
**Solution:** CE : $-1 \leq 1 - \arccos x \leq 1$ et $-1 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} -1 \leq 1 - \arccos x \leq 1 &\iff -2 \leq -\arccos x \leq 0 \\ &\iff 0 \leq \arccos x \leq 2 \quad (< \pi) \\ &\iff \cos(0) \geq x \geq \cos(2) \quad (*) \\ &\iff \cos(2) \leq x \leq \cos(0) \\ &\quad \text{(car arccos est décroissante)} \\ &\iff \cos(2) \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Comme $-1 < \cos(2) < 0$, $\operatorname{dom} f = [\cos(2)\,;1]$ avec $\cos(2) \approx -0.416$

Un dessin est plus simple pour comprendre le changement de sens des inégalités (*).

On trace $\arccos x$ et on dessine les droites d'équation $y = 2$ et $y = 0$. Puis on analyse le graphe.




**3** **DEVOIR** : Déterminer le domaine de définition et de continuité ainsi que les racines de

$$f : x \mapsto \arccos\left(1 - 2x - x^2\right)$$