Formulaire :

— arcsin est dérivable sur $]-1,1[$: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $(\arcsin(u(x)))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

— arccos est dérivable sur $]-1,1[$: $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $(\arccos(u(x)))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

— arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ et $(\arctan(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

— autres formules : $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ et $(u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v'$

Ramarque : $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, mais on a aussi $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$. (voir exercice 1)

Exemples :

a) $(x \cdot \arcsin x)' = (x)' \cdot \arcsin(x) + x \cdot (\arcsin x)' = \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\left(\arctan\left(\sqrt{x}\right)\right)' = \frac{(\sqrt{x})'}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

c)
$$\left(\frac{\arcsin x}{\arccos x}\right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos(x) - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\arcsin(x)}{(\arccos(x))^2}$$
$$= \frac{\arccos(x)+\arcsin(x)}{\arccos^2(x)\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{\pi}{2\arccos^2(x)\sqrt{1-x^2}}$$

prop. $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \quad (\forall x \in [-1;1])$

---

1 Justifiez la formule de dérivation de la fonction arctan.

2 Dériver les fonctions suivantes. La réponse finale sera **simplifiée** au maximum et **factorisée** si possible.

(a) $f(x) = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

(b) $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(c) $f(x) = \sqrt{\arcsin\left(1-x^2\right)}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{\arccos x}$

(e) $f(x) = \arctan(\arctan(2x))$

3 Dériver $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que peut-on conclure?

Prouver, ensuite, que $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

4 Justifie que la fonction $g(x) = 18 \cdot \arcsin^2(x) - 9\pi \cdot \arcsin(x) + \pi^2$ possède un minimum en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

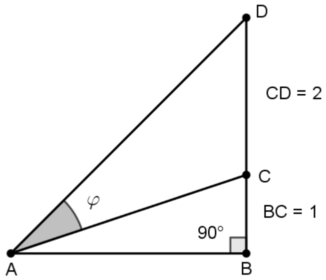
5 On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \arccos\left(2x^2 - x\right)$. Établir son tableau de variations et déterminer (au centième près) la coordonnée de son maximum.

6 Recherche l'équation cartésienne de la tangente au graphe cartésien de f au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto x \cdot \arcsin(2x)$$

Rappel : $T \equiv y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$ est l'équation cartésienne de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a.

7 Trouver la longueur du segment $[AB]$ qui maximise l'angle φ (angle $\widehat{CAD}$). Justifier par un raisonnement faisant appel à l'étude de variation de fonction.



8 La statue de la liberté est haute de 46 mètres et est placée sur un piédestal de 47 mètres. Réaliser un schéma de la situation. À quelle distance x_0 doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal? Exprimer l'angle sous lequel on voit la statue dans l'objectif en fonction de x, la distance recherchée.