Formulaire :

— arcsin est dérivable sur $]-1,1[$: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $(\arcsin(u(x)))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

— arccos est dérivable sur $]-1,1[$: $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $(\arccos(u(x)))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

— arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ et $(\arctan(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

— autres formules : $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ et $(u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v'$

Ramarque : $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, mais on a aussi $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$. (voir exercice 1)

Exemples :

a) $(x \cdot \arcsin x)' = (x)' \cdot \arcsin(x) + x \cdot (\arcsin x)' = \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\left(\arctan\left(\sqrt{x}\right)\right)' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

c) $$\left(\frac{\arcsin x}{\arccos x}\right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos(x) - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\arcsin(x)}{(\arccos(x))^2}$$
$$= \frac{\arccos(x)+\arcsin(x)}{\arccos^2(x)\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{\pi}{2\arccos^2(x)\sqrt{1-x^2}}$$

prop. $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \quad (\forall x \in [-1;1])$

---

1 Justifiez la formule de dérivation de la fonction arctan.

Solution: On commence par écrire l'identité : $\tan(\arctan x) = x$ puis on dérive chaque côté de l'égalité par rapport à x. On obtient :

$$((\tan(\arctan x)))' = 1 \iff \left(1+\tan^2(\arctan x)\right) \cdot (\arctan x)' = 1$$
$$\iff (\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$$
$$\iff (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

2 Dériver les fonctions suivantes. La réponse finale sera **simplifiée** au maximum et **factorisée** si possible.

(a) $f(x) = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

Solution: $(\forall x \in]-2,2[)$

$$h'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} + 4\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$$
$$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \frac{4-x^2-x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \frac{2\left(4-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$= 2\sqrt{4-x^2}$$

(b) $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Solution: $$\left(\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+1}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

note : cette fonction n'est pas dérivable en 1

(c) $f(x) = \sqrt{\arcsin\left(1-x^2\right)}$

Solution: $$\left(\sqrt{\arcsin\left(1-x^2\right)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin\left(1-x^2\right)}}\left(\arcsin\left(1-x^2\right)\right)' = -\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{\arcsin\left(1-x^2\right)}\sqrt{2-x^2}}$$

note : **dom** $f = [-1;1]$ et

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\arcsin(1-x^2)}\sqrt{2-x^2}}$ quand $x \in [-1;0[$

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{\arcsin(1-x^2)}\sqrt{2-x^2}}$ quand $x \in]0;1]$

en effet, si $x \in [-1;0[$ alors $\frac{x}{|x|} = -1$ et si $x \in]0;1]$ alors $\frac{x}{|x|} = 1$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{\arccos x}$

Solution: $$\left(\frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{\arccos x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{1}{\arcsin^2 x} + \frac{1}{\arccos^2 x}\right]$$

remarque : $\left[\frac{1}{\arcsin^2 x} + \frac{1}{\arccos^2 x}\right]$ n'est pas simplifiable.

(e) $f(x) = \arctan(\arctan(2x))$

Solution: $$(\arctan(\arctan(2x)))' = \frac{2}{\left(1+\arctan^2(2x)\right)\left(1+4x^2\right)}$$

3 Dériver $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que peut-on conclure?

Prouver, ensuite, que $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Solution: L'essence de cette question réside dans la démonstration que, pour simplifier une expression contenant une fonction cyclométrique, on peut efficacement exploiter sa dérivée. En la mettant en parallèle avec la dérivée d'une fonction plus élémentaire et en identifiant une constante additionnelle adéquate, cette méthode permet de formuler la simplification recherchée de la fonction cyclométrique de manière plus claire et concise.

On dérive donc la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Cette dérivée étant nulle, cela signifie que la fonction est tout simplement une fonction constante. Mais attention, cette constante n'est peut-être pas identique sur l'ensemble du domaine.

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{Constante}$$

Le domaine d'existence de la fonction de départ est divisé en deux intervalles : $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$

Il suffit alors d'évaluer l'image d'un réel bien choisi dans chacun de ces deux intervalles (la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ étant continue sur chacun de ceux-ci) pour obtenir la fonction constante désirée.

1. soit $x = -1$: $\arctan(-1) + \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

   d'où $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ et ce, $\forall x \in \mathbb{R}_0^-$

2. soit $x=1$: $\arctan(1)+\arctan\left(\frac{1}{1}\right)=\arctan(1)+\arctan(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$
   d'où $\forall x\in\mathbb{R}_0^+ : \arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

On vient de prouver que $\arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x>0\end{cases}$

4 Justifie que la fonction $g(x)=18\cdot\arcsin^2(x)-9\pi\cdot\arcsin(x)+\pi^2$ possède un minimum en $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution: $\mathbf{dom}\, g=[-1,1]$
$g'(x)=36\arcsin(x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-9\pi\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=36\cdot\dfrac{\arcsin(x)-\pi/4}{\sqrt{1-x^2}}$

x	-1		$\sqrt{2}/2$		1
$\arcsin(x)-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-$	0	$+$	$\frac{\pi}{4}$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$g(x)$	$10\pi^2$	$\searrow$	$-\frac{\pi^2}{8}$	$\nearrow$	π^2

Le tableau de variation confirme la présence d'un minimum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Le minimum de la fonction g vaut $-\frac{\pi^2}{8}$.

5 On donne la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\ x\mapsto\arccos\left(2x^2-x\right)$. Établir son tableau de variations et déterminer (au centième près) la coordonnée de son maximum.

Solution: On doit d'abord rechercher le domaine de défintion de la fonction :
$$\text{CE} : -1\le 2x^2-x\le 1 \iff 2x^2-x+1\ge 0 \quad\text{et}\quad 2x^2-x-1\le 0$$
$$\iff x\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad x\in\left[-\tfrac{1}{2};1\right]$$
$$\left(\arccos\left(2x^2-x\right)\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-(2x^2-x)^2}}\cdot\left(2x^2-x\right)'=-\frac{4x-1}{\sqrt{1-(2x^2-x)^2}}=\frac{1-4x}{\sqrt{1-(2x^2-x)^2}}$$
On recherche les racines du numérateur et du dénominateur pour les placer dans le tableau des signes de f' : (on indiquera les signes par la suite)
$1-4x=0\iff x=\frac{1}{4}$ et $1-\left(2x^2-x\right)^2=0\iff x\in\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$

x	$-1/2$		$1/4$		1
$1-4x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\sqrt{1-\left(2x^2-x\right)^2}$	$\Vert$	$+$	$+$	$+$	$\Vert$
f'	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
f	0	$\nearrow$	$\arccos\left(-\frac{1}{8}\right)$	$\searrow$	0

Le graphe de f possède bien un maximum dont la coordonnée est $\left(\frac{1}{4}\,;\ \arccos\left(-\frac{1}{8}\right)\right)$ qui au centième près est $(0{,}25\,;\ 1{,}70)$ (1,70 est obtenu par la machine à calculer)

6 Recherche l'équation cartésienne de la tangente au graphe cartésien de f au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto x \cdot \arcsin(2x)$$

Rappel : $T \equiv y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$ est l'équation cartésienne de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a.

Solution: $(x \cdot \arcsin(2x))' = \arcsin(2x) + x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot (2x)'$

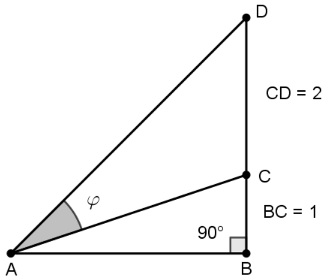
$$= \arcsin(2x) + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

d'où $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{16}}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}$

de plus, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{24}$

finalement, $T \equiv y - \frac{\pi}{24} = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)$

7 Trouver la longueur du segment $[AB]$ qui maximise l'angle φ (angle $\widehat{CAD}$). Justifier par un raisonnement faisant appel à l'étude de variation de fonction.



Solution: Soit $x = \overline{AB} \in \mathbb{R}^+$ et $\theta = \widehat{BAC}$. On a $\theta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\varphi + \theta = \arctan\left(\frac{3}{x}\right)$.

D'où : $\varphi = \arctan\left(\frac{3}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\varphi' = \left(\arctan\left(\frac{3}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{-2x^2+6}{(x^2+9)(x^2+1)}$

Le signe de φ' est obtenu à partir de celui de $-2x^2 + 6$ puisque son dénominateur est toujours positif.

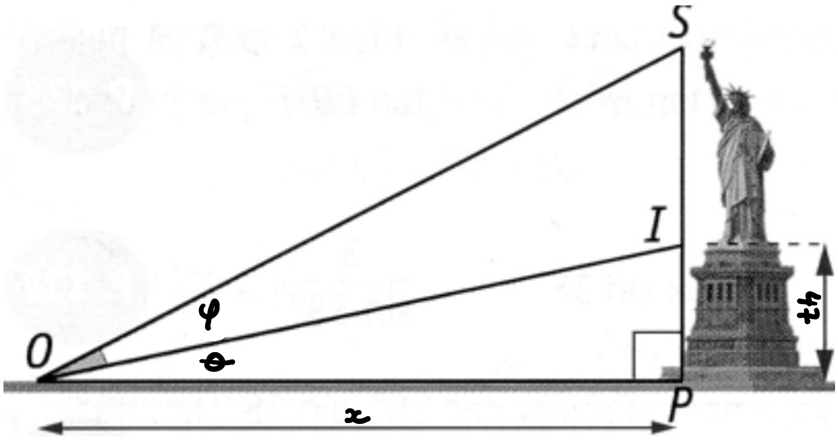
x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}$	$\searrow$	0

La fonction φ atteint son maximum en $x = \sqrt{3}$ et vaut $\varphi\left(\sqrt{3}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

La longueur du segment $[AB]$ qui maximise l'angle φ est donc $\sqrt{3}$.

8 La statue de la liberté est haute de 46 mètres et est placée sur un piédestal de 47 mètres. Réaliser un schéma de la situation. À quelle distance x_0 doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal? Exprimer l'angle sous lequel on voit la statue dans l'objectif en fonction de x, la distance recherchée.

Solution: $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \varphi + \theta = \arctan\left(\dfrac{46+47}{x}\right)$ et $\theta = \arctan\left(\dfrac{47}{x}\right) \Longrightarrow \varphi(x) = \arctan\left(\dfrac{93}{x}\right) - \arctan\left(\dfrac{47}{x}\right)$



Nous devons maximiser $\varphi(x)$. Etudions le signe de $\varphi'(x)$:

$$\left(\arctan\left(\frac{93}{x}\right)-\arctan\left(\frac{47}{x}\right)\right)'=\frac{-46x^2+201066}{\left(x^2+8649\right)\left(x^2+2209\right)}$$

Le dénominateur étant strictement positif, il suffit d'établir le signe de $-46x^2+201066$ pour obtenir le tableau de variation de φ :

x	0		$\sqrt{4371}$		
$-46x^2+201066$	‖	$+$	0	$-$	
$\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0^+	$\nearrow$	$\varphi_{\max}$	$\searrow$	0^+

$$x_0=\sqrt{4371}\approx 66,11 \text{ m et } \varphi_{\max}\approx 19,18^\circ$$