Le principe de résolution d'une équation cyclométrique est basée sur l'élimination des fonctions cyclométriques qui y apparaissent par composition avec une fonction trigonométrique bien choisie. De cette manière, on fait apparaitre la fonction identité tout comme dans la résolution d'équation irrationnelle.

Cette opération ne peut être réalisée qu'après avoir posé des conditions d'existence (CE) ainsi que des conditions de résolution (CR). Quoi qu'il arrive, il est indispensable de valider chaque solution en la replaçant dans l'équation de départ.

---

exemple (*complet*) : soit à résoudre l'équation cyclométrique $\arcsin(2x) = \frac{\pi}{4} + \arcsin(x)$

CE : $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et CR : $\arcsin(2x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\frac{\pi}{4} + \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

l'équation impose : $\begin{cases} \arcsin(2x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi}{4} + \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ x \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{cases} \iff x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right]$

la solution, si elle existe, doit appartenir à l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right] \approx [-0{,}35\ ;\ 0{,}5]$

résolution proprement dite :

$$\begin{aligned}
\sin(\arcsin(2x)) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin(x)\right) &\iff 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\arcsin(x)) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\arcsin(x)) \\
&\iff 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{1-x^2} + x\right) \\
&\iff 2\sqrt{2}x = \sqrt{1-x^2} + x \\
&\iff (2\sqrt{2}-1)x = \sqrt{1-x^2} \\
&\iff x > 0 \quad \text{et} \quad \left(9-4\sqrt{2}\right)x^2 = 1 - x^2 \\
&\iff (10-4\sqrt{2})x^2 = 1 \\
&\iff x = \frac{1}{\sqrt{2(5-2\sqrt{2})}} \approx 0{,}48
\end{aligned}$$

on a $0{,}48 \in [-0{,}35\ ;\ 0{,}5]$ et l'ensemble de solutions est $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2(5-2\sqrt{2})}}\right\}$

---

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$: (équations simples)

(a) $\pi + \arcsin 2x = 0$

(b) $\arccos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

(c) $\arcsin(2x+4) = 0$

(d) $\arccos(2x) + 4 = 0$

(e) $\arccos(x) = \arctan\frac{3}{4}$

(f) $\arctan(x) = \arctan\frac{8}{5} + \arctan\frac{3}{8}$

(g) $\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}$

(h) $\arccos x = \arctan x$

Solution:

(a) On veille à isoler arcsin d'un seul côté de l'égalité pour réécrire l'équation comme suit :

$$\arcsin 2x = -\pi$$

Pour la CE : $2x \in [-1; 1]$ que l'on simplifie par CE : $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Pour la CR : $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin 2x \leq \frac{\pi}{2} & \text{(toujours vrai)} \\ -\frac{\pi}{2} \leq -\pi \leq \frac{\pi}{2} & \text{(toujours faux!)} \end{cases}$

Cette CR implique immédiatement l'ensemble vide pour ensemble de solutions. $S = \emptyset$

(b) (a) CE : $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \iff -2 \leq x \leq 2$

(b) CR : $\begin{cases} 0 \leq \arccos\frac{x}{2} \leq \pi & \text{(toujours vrai)} \\ 0 \leq \frac{\pi}{3} \leq \pi & \text{(toujours vrai)} \end{cases}$

La CR est suffisante et toujours vraie, donc :

$$\cos\left(\arccos\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \implies \frac{x}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \implies x = 1$$

Donc : $S = \{1\}$

(c) CE : $x \in \left[\frac{-5}{2}; \frac{-3}{2}\right]$; $S = \{-2\}$

(d) CE : $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

$$0 \le \arccos(2x) \le \pi \iff 4 \le \arccos(2x) + 4 \le \pi + 4$$

$$\implies \arccos(2x) + 4 \ne 0 \quad \forall x \in \left[-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right] \quad \text{d'où} : S = \emptyset$$

(e) on sait que $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$ d'où $\cos\left(\arctan\frac{3}{4}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \pm\frac{4}{5}$

Par ailleurs, $x \in [-1;1]$ et $\arctan\frac{3}{4}$ appartient au premier quadrant, d'où $S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$

(f) CE : $x \in \mathbb{R}$ $\quad x = \tan\left(\arctan\frac{8}{5} + \arctan\frac{3}{8}\right) = \frac{\frac{8}{5}+\frac{3}{8}}{1-\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{8}} = \frac{79}{16}$

Il faut encore vérifier que $\frac{79}{16}$ est bien la solution de l'équation de départ. Il suffit de remplacer x par $\frac{79}{16}$ dans l'équation de départ et vérifier l'égalité (avec la calculatrice en mode **radian**) : on a bien $S = \left\{\frac{79}{16}\right\}$

Petite remarque : la fonction arctan étant strictement croissante, on a

$$\left.\begin{array}{l} 1 < \frac{8}{5} < \sqrt{3} \implies \frac{\pi}{4} < \arctan\frac{8}{5} < \frac{\pi}{3} \\ 0 < \frac{3}{8} < \frac{\sqrt{3}}{3} \implies 0 < \arctan\frac{3}{8} < \frac{\pi}{6} \end{array}\right\} \implies \arctan\frac{8}{5} + \arctan\frac{3}{8} \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$$

Pour que l'équation de départ possède au moins une solution, les deux conditions suivantes doivent être vérifiées en même temps

$$\left.\begin{array}{r} \arctan\frac{8}{5} + \arctan\frac{3}{8} \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\\ \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\end{array}\right\} \implies \arctan x \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$$

Par conséquent, la solution (si elle existe!) doit vérifier $x > 1$

(g) CE : $-1 \le x \le 1$

$$\arccos x = 2\cdot\arccos\frac{3}{4} \iff x = \cos\left(2\cdot\arccos\frac{3}{4}\right)$$

on utilise la formule $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ et on arrive à : $x = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$

On vérifie à la calculatrice $\arccos\left(\frac{1}{8}\right) = 2\cdot\arccos\frac{3}{4}$: on peut écrire $S = \left\{\frac{1}{8}\right\}$

(h) Pour la CE : $x \in [-1;1]$ pour arccos et $x \in \mathbb{R}$ pour arctan. D'où CE : $x \in [-1;1]$.

Pour la CR :

$$\underbrace{\underbrace{\arccos x}_{\in[0;\pi]} = \underbrace{\arctan x}_{\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}}_{[0;\pi]\cap[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[=[0;\frac{\pi}{2}[} \quad \text{CR} : \begin{cases} \arccos x \in [0;\frac{\pi}{2}[\\ \arctan x \in [0;\frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

Cela signifie que les angles $\arccos x$ et $\arctan x$ doivent se situer dans le premier quadrant. Cela implique également que $x > 0$.

Combiné à la CE, une solution éventuelle de l'équation cyclométrique doit vérifier $x \in [0;1]$.

Remarque : La CR impose que les deux membres soient dans le premier quadrant. S'ils ont le même cosinus en étant dans le même quadrant, ils sont forcément égaux. La CR est suffisante : elle garantit que les solutions de vérifient l'équation de départ.

Résolution proprement dite : le choix de la fonction trigonométrique appliquée aux deux membres de l'égalité se porte sur la fonction tangente

$$\tan(\arccos x) = x \implies \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = x \implies \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = x$$

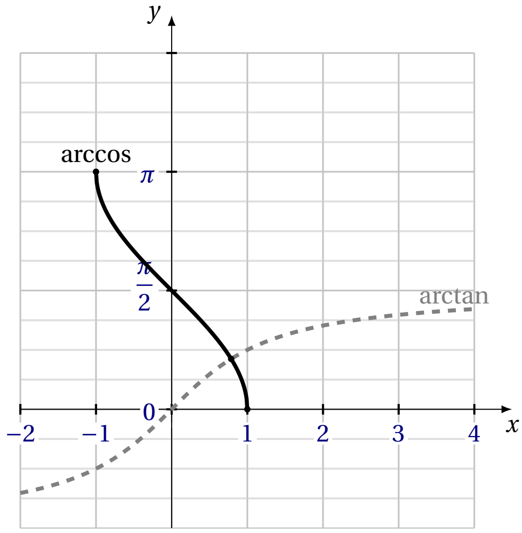
La dernière équation irrationnelle trouve ses solutions en résolvant $x^4 + x^2 - 1 = 0$ (équation bicarrée)

On trouve $x = -\frac{\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}}{2} \approx 0,786$

L'équation cyclométrique de départ $\arccos x = \arctan x$ a pour ensemble de solution

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{5}-1\right)}}{2} \right\}$$

D'un point de vue graphique :



2 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\arcsin(1-x) - 2\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$. Justifie ta réponse.

Solution: CE : $-1 \leq x \leq 1$ et $0 \leq x \leq 2 \implies$ CE : $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned}
\arcsin(1-x) - 2\arcsin(x) = \tfrac{\pi}{2} &\iff \arcsin(1-x) = \tfrac{\pi}{2} + 2\arcsin(x) \\
&\iff 1-x = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + 2\arcsin(x)\right) \\
&\iff 1-x = \cos(2\arcsin(x)) \\
&\iff 1-x = 1-2(\sin(\arcsin(x)))^2 \\
&\iff 1-x = 1-2x^2 \\
&\iff x\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Donc $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$. Mais si on remplace $x = \frac{1}{2}$ dans l'équation de départ, on obtient : $-\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}$

L'unique solution est donc $x = 0$.

Remarque : Dans la première étape, on a ajouté une solution supplémentaire.

$\arcsin(1-x)$ doit être inférieur à $\pi/2$, donc $\frac{\pi}{2} + 2\arcsin(x)$ doit l'être également.

$$\frac{\pi}{2} + 2\arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2} \iff x \leq 0$$

3 Donnez la valeur exacte de x sachant que $\arcsin(x) + \arcsin(0,5) = \frac{\pi}{4}$

Rappel : $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha$

Solution: $\arcsin(x) + \arcsin(0,5) = \frac{\pi}{4} \iff \arcsin(x) + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
&\iff \arcsin(x) = \tfrac{\pi}{12} \\
&\iff x = \sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$

À priori, on ne connait pas la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Il faut donc procéder autrement : on doit utiliser le rappel!

$$\begin{aligned}\arcsin(x)+\arcsin(0,5)=\tfrac{\pi}{4} &\iff \sin(\arcsin(x)+\arcsin(0,5))=\tfrac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff x\cdot\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}+\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1-x^2}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff \sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}\\ &\iff \sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}-\sqrt{3}x \quad (E)\end{aligned}$$

On pose les CRS (conditions à la recherche de solutions) : $\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ \sqrt{2}-\sqrt{3}x\geq 0\end{cases} \iff x\in\left[-1;\tfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}-\sqrt{3}x &\iff 1-x^2=3x^2-2\sqrt{6}x+2\\ &\iff 4x^2-2\sqrt{6}x+1=0\\ &\iff x=\tfrac{(\sqrt{3}\pm1)\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

CRS $\implies$ S= $\left\{\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}\right\}$

conclusion : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$

4 Résoudre les équations cyclométriques

(a) $\arctan(x+1)+\arctan(x-1)=\frac{\pi}{4}$ *Rappel* : $\tan\left(\alpha\pm\beta\right)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

Solution: S= $\{-1+\sqrt{3}\}$

(b) $\arcsin x=\arccos\frac{1}{3}-\arccos\frac{1}{4}$.

Solution: S= $\left\{\frac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}\right\}$

5 Équations aux arctan. Résoudre :

(a) $\arctan 2x+\arctan 3x=\dfrac{\pi}{4}$

(b) $\arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)+\arctan\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

(c) $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)+\arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

(d) $\arctan(x-3)+\arctan(x)+\arctan(x+3)=\dfrac{5\pi}{4}$

Solution:

(a) $S=\{\frac{1}{6}\}$

(b) $S=\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

(c) $S=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

(d) $x^3-3x^2-12x+10=0 \implies x=5,-1\pm\sqrt{3}$ mais seule la solution $x=5$ convient : $S=\{5\}$

6 Résoudre les équations et inéquations cyclométriques suivantes sans oublier de poser les conditions d'existence.

(a) $\arccos(2x)\cdot\arcsin(x)=0$

(b) $\dfrac{\arccos x}{\arcsin x}<0$

(c) $\dfrac{\arccos(2x)}{\frac{\pi}{4}-\arcsin(2x)}\geq 0$

(d) $\arccos(3-x)>0$

(e) $\arcsin^2 x-\arccos^2 x=0$

(f) $\arcsin^3 x-\arcsin x=0$

(g) $\arccos^3 x-\arccos^2 x<0$

(h) $\arcsin\left(x^2-2x\right)<0$

(i) $1-\arcsin^2(2x)\leq 0$

(j) $\arcsin^2(3x)-\frac{\pi^2}{9}\geq 0$

Solution:

(a) $S = \left\{0\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$

(b) $S = [-1\ ;\ 0[$

(c) $S = \left[-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right[$

(d) $S =]2\ ;\ 4]$

(e) $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

(f) $S = \left\{-\sin(1)\ ;\ 0\ ;\ \sin(1)\right\}$

(g) $S = \left]\cos(1)\ ;\ 1\right[$

(h) $S = \left]0\ ;\ 2\right[$

(i) $S = \left[-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{\sin(1)}{2}\right] \cup \left[\frac{\sin(1)}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right]$

(j) $S = \left[-\frac{1}{3}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{6}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{6}\ ;\ \frac{1}{3}\right]$