La règle de l'Hospital :

- La *règle de l'Hospital* est un outil puissant pour calculer certaines limites indéterminées. Elle s'applique dans le contexte où on considère deux fonctions dérivables f et g en un point x_0 ou à l'infini, et où le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ est sous forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- *Principe de la règle de l'Hospital* :
  Si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite finie ℓ lorsque $x \to x_0$ ou $x \to \pm\infty$, alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend également vers ℓ.
- **Hypothèses requises** :
  1. Les fonctions f et g s'annulent en x_0 (ou tendent vers $\pm\infty$ dans les cas infinis).
  2. La dérivée g' ne s'annule pas autour de x_0 (ou pour des valeurs suffisamment grandes de x si on tend vers $\pm\infty$).
- **Conclusion** : la règle de l'Hospital permet de lever l'indétermination en remplaçant le calcul de $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ par celui de $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
  Cette règle est aussi valide pour les limites à l'infini dans les cas de forme indéterminée $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Méthode par l'exemple :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) + \frac{\arcsin(x)}{x}$
   Cette limite n'existe pas (ne peut être calculée) car **dom** $f = [-1\,;1] \setminus \{0\}$
   Conclusion : il faut toujours rechercher le domaine d'existence de la fonction avant de calculer sa limite.
2. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)$
   (a) on peut calculer cette limite car **dom** $f = \mathbb{R}_0$
   (b) à droite de 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} x\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = 0\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
   (c) à gauche de 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right) = \left(\lim\limits_{x\to 0^-} x\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = 0\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
   Les limites directionnelles sont identiques, on peut donc écrire : $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$
   Conclusion : étant donné l'absence de formes indéterminées, il est interdit d'appliquer la règle de l'Hospital.
   Remarque : le graphe de f admet un point creux en $(0,0)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)$
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} x\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = (+\infty)\cdot(0)$ est une forme indéterminée.
   Conclusion : on peut appliquer la règle de l'Hospital !
   (b) Pour appliquer la règle de l'Hospital à un produit de deux fonctions, il est souvent nécessaire de le transformer en un quotient. Il faut écrire l'une des fonctions sous forme d'inverse, c'est-à-dire que $f(x)\cdot g(x)$ devient $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ou $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1/x} \overset{\text{FI}}{=} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x^2}{x^2+\pi^2} = \pi$$

   Remarque : le graphe de f admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = \pi$

Rappelons-nous toujours de vérifier les conditions d'application de la règle de l'Hospital et de ne pas l'utiliser mécaniquement. Bonne pratique !

Exercices

1 Calculer les limites suivantes (éventuellement en utilisant la règle de l'Hospital)

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \arcsin(2x-1)$

(b) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \arccos(1-x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\arctan(2x)}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)-2x}{\sin^3(x)}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-\arcsin x}{2\arctan x - x}$

Solution:

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \arcsin(2x-1) \overset{(\star)}{=} \arcsin\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right) = \arcsin 0 = 0$ (($\star$) il faut d'abord évaluer la fonction)

(b) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \arccos(1-x)$ n'existe pas car $-\frac{1}{2} \notin$ **dom** $f = [0\,;\,2]$ (et n'adhère pas au domaine non plus!)

(c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\arctan\left(\frac{1}{0^-}\right)\right] = [\arctan(-\infty)] = -\frac{\pi}{2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x} = \left[\dfrac{\arcsin(0)}{0}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\arcsin(x))'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{1-0}}\right] = 1$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\arctan(2x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{\frac{2}{1+4x^2}} = \left[\dfrac{3}{\frac{2}{1+0}}\right] = \dfrac{3}{2}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \left[(+\infty)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right] = [(+\infty)\cdot 0] \quad \leftarrow \text{FI}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{\frac{1}{x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)-2x}{\sin^3(x)} = \left[\dfrac{\arcsin(0)-0}{\sin^3(0)}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2}{3\sin^2(x)\cos(x)}$$

$$= \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{1-0}} - 2}{3\sin^2(0)\cos(0)}\right] \qquad \cos(0) = 1\,;\ \sin^2 x \geq 0$$

$$= \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

(h) Je calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \arcsin x}{2\arctan x - x} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0} = \text{IND}.$

Pour lever l'indétermination, je vais utiliser la règle de l'Hospital. Je dérive le numérateur et le dénominateur :

$(2x - \arcsin x)' = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $(2\arctan x - x)' = 2 \times \frac{1}{1+x^2} - 1.$

Je calcule alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2 \times \frac{1}{1+x^2} - 1} = \dfrac{2 - \frac{1}{\sqrt{1-0^2}}}{2 \times \frac{1}{1+0^2} - 1} = 1.$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \arcsin x}{2\arctan x - x} = 1.$

2 On donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{\arcsin(x) - 2x}{\frac{\pi}{2} - \arccos(x)}$

Rechercher le domaine de définition de f puis calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Comment se comporte le graphe de f au voisinage de 0 ?

Solution: CE : $-1 \leq x \leq 1$ et $\frac{\pi}{2} - \arccos(x) \neq 0 \iff \arccos(x) \neq \frac{\pi}{2} \iff x \neq 0$

dom $f = [-1\,;\,1] \setminus \{0\}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x) - 2x}{\frac{\pi}{2} - \arccos(x)} = \left[\frac{\arcsin(0) - 0}{\frac{\pi}{2} - \arccos(0)}\right] = \left[\frac{0-0}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2}{0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)} = \lim_{x\to 0} 1 - 2\sqrt{1-x^2} = 1 - 2\sqrt{1-0} = -1$$

Comment se comporte le graphe de f au voisinage de 0 ? **Le graphe de possède un point creux en** $(0\,;\,-1)$

3 Calculer les limites suivantes en utilisant au besoin la règle de l'Hospital :

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\pi - \arccos x}{\sqrt{x+1}}$

Solution:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\pi-\arccos x}{\sqrt{x+1}} \overset{"0/0"}{\underset{\text{H}}{=}} \lim_{x\to-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x\to-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x\to-1}\frac{2}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\cot(3x)\cdot\arcsin(2x)$

Solution:

$$\lim_{x\to 0}\cot(3x)\cdot\arcsin(2x) = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)}{\tan(3x)} \overset{"0/0"}{\underset{\text{H}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}{3\left(1+\tan^2(3x)\right)} = \frac{2}{3}$$

4 Rechercher les équations cartésiennes des asymptotes éventuelles au graphe de la fonction suivante :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\ x\mapsto x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Solution:

5 Rechercher le domaine d'existence de la fonction

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Le graphe de cette fonction possède-t-elle une ou plusieurs asymptotes ? Justifier par calcul de limite (notation précise exigée !)

Solution:

6 Calculs de limites supplémentaires

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arctan(x)}\right)$

Solution:

(b) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

Solution:

(c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x^2}{(\arcsin x)^2}$

Solution: $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}\arcsin x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{4x^4}{(1-x^4)^{3/2}}+\frac{2}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{2}{1-x^2}+\frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}} = 1$