La règle de l'Hospital :

- La *règle de l'Hospital* est un outil puissant pour calculer certaines limites indéterminées. Elle s'applique dans le contexte où on considère deux fonctions dérivables f et g en un point x_0 ou à l'infini, et où le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ est sous forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- *Principe de la règle de l'Hospital* :
  Si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite finie ℓ lorsque $x \to x_0$ ou $x \to \pm\infty$, alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend également vers ℓ.
- **Hypothèses requises** :
  1. Les fonctions f et g s'annulent en x_0 (ou tendent vers $\pm\infty$ dans les cas infinis).
  2. La dérivée g' ne s'annule pas autour de x_0 (ou pour des valeurs suffisamment grandes de x si on tend vers $\pm\infty$).
- **Conclusion** : la règle de l'Hospital permet de lever l'indétermination en remplaçant le calcul de $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ par celui de $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
  Cette règle est aussi valide pour les limites à l'infini dans les cas de forme indéterminée $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Méthode par l'exemple :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) + \frac{\arcsin(x)}{x}$
   Cette limite n'existe pas (ne peut être calculée) car **dom** $f = [-1\,;1] \setminus \{0\}$
   Conclusion : il faut toujours rechercher le domaine d'existence de la fonction avant de calculer sa limite.
2. $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)$
   (a) on peut calculer cette limite car **dom** $f = \mathbb{R}_0$
   (b) à droite de 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \arctan\left(\frac{\pi}{x}\right) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} x\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = 0 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
   (c) à gauche de 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot \arctan\left(\frac{\pi}{x}\right) = \left(\lim\limits_{x\to 0^-} x\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = 0 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
   Les limites directionnelles sont identiques, on peut donc écrire : $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \arctan\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$
   Conclusion : étant donné l'absence de formes indéterminées, il est interdit d'appliquer la règle de l'Hospital.
   Remarque : le graphe de f admet un point creux en $(0,0)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)$
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \arctan\left(\frac{\pi}{x}\right) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} x\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = (+\infty)\cdot(0)$ est une forme indéterminée.
   Conclusion : on peut appliquer la règle de l'Hospital !
   (b) Pour appliquer la règle de l'Hospital à un produit de deux fonctions, il est souvent nécessaire de le transformer en un quotient. Il faut écrire l'une des fonctions sous forme d'inverse, c'est-à-dire que $f(x)\cdot g(x)$ devient $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ou $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \arctan\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1/x} \overset{\text{FI}}{=} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x^2}{x^2+\pi^2} = \pi$$

   Remarque : le graphe de f admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = \pi$

Rappelons-nous toujours de vérifier les conditions d'application de la règle de l'Hospital et de ne pas l'utiliser mécaniquement. Bonne pratique !

Exercices

1 Calculer les limites suivantes (éventuellement en utilisant la règle de l'Hospital)

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \arcsin(2x-1)$

(b) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \arccos(1-x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\arctan(2x)}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)-2x}{\sin^3(x)}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-\arcsin x}{2\arctan x - x}$

Solution:

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \arcsin(2x-1) \stackrel{(\star)}{=} \arcsin\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right) = \arcsin 0 = 0$ $\quad$ (($\star$) il faut d'abord évaluer la fonction)

(b) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \arccos(1-x)$ n'existe pas car $-\frac{1}{2} \notin$ **dom** $f = [0\,;\,2]$ (et n'adhère pas au domaine non plus!)

(c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\arctan\left(\frac{1}{0^-}\right)\right] = [\arctan(-\infty)] = -\frac{\pi}{2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x} = \left[\dfrac{\arcsin(0)}{0}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\arcsin(x))'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{1-0}}\right] = 1$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\arctan(2x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{\frac{2}{1+4x^2}} = \left[\dfrac{3}{\frac{2}{1+0}}\right] = \dfrac{3}{2}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \left[(+\infty)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right] = [(+\infty)\cdot 0] \quad \leftarrow \text{FI}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x) - 2x}{\sin^3(x)} = \left[\dfrac{\arcsin(0)-0}{\sin^3(0)}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2}{3\sin^2(x)\cos(x)}$$

$$= \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{1-0}} - 2}{3\sin^2(0)\cos(0)}\right] \qquad \cos(0) = 1\,;\ \sin^2 x \geq 0$$

$$= \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

(h) Je calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \arcsin x}{2\arctan x - x} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0} = \text{IND}.$

Pour lever l'indétermination, je vais utiliser la règle de l'Hospital. Je dérive le numérateur et le dénominateur :

$(2x - \arcsin x)' = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $(2\arctan x - x)' = 2 \times \frac{1}{1+x^2} - 1.$

Je calcule alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2 \times \frac{1}{1+x^2} - 1} = \dfrac{2 - \frac{1}{\sqrt{1-0^2}}}{2\times\frac{1}{1+0^2} - 1} = 1.$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \arcsin x}{2\arctan x - x} = 1.$

2 On donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{\arcsin(x) - 2x}{\frac{\pi}{2} - \arccos(x)}$

Rechercher le domaine de définition de f puis calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Comment se comporte le graphe de f au voisinage de 0 ?

Solution: CE : $-1 \leq x \leq 1$ et $\frac{\pi}{2} - \arccos(x) \neq 0 \iff \arccos(x) \neq \frac{\pi}{2} \iff x \neq 0$

dom $f = [-1\,;\,1] \setminus \{0\}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x) - 2x}{\frac{\pi}{2} - \arccos(x)} = \left[\frac{\arcsin(0) - 0}{\frac{\pi}{2} - \arccos(0)}\right] = \left[\frac{0-0}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2}{0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)} = \lim_{x\to 0}\ 1 - 2\sqrt{1-x^2} = 1 - 2\sqrt{1-0} = -1$$

Comment se comporte le graphe de f au voisinage de 0 ? **Le graphe de possède un point creux en** $(0\,;\,-1)$

3 Calculer les limites suivantes en utilisant au besoin la règle de l'Hospital :

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\pi - \arccos x}{\sqrt{x+1}}$

Solution:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\pi - \arccos x}{\sqrt{x+1}} \overset{"0/0"}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x\to -1} \frac{2}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(b) $\lim_{x\to 0} \cot(3x)\cdot \arcsin(2x)$

Solution:

$$\lim_{x\to 0} \cot(3x)\cdot\arcsin(2x) = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)}{\tan(3x)} \overset{"0/0"}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}{3\left(1+\tan^2(3x)\right)} = \frac{2}{3}$$

4 Rechercher les équations cartésiennes des asymptotes éventuelles au graphe de la fonction suivante :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\; x\mapsto x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Solution: dom $f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\lim_{x\to+\infty} x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) = (+\infty)\cdot(0)$ FI

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^2\arctan\left(\tfrac{1}{1+x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2\left((1+x)^2+1\right)} = +\infty\end{aligned}$$

même résultat pour $\lim_{x\to-\infty} x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\infty \Longrightarrow$ il n'y a donc pas d'asymptote horizontale!

on doit vérifier la présence d'une asymptote oblique : (formules de Cauchy)

$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) = (\pm\infty)\cdot\left(0^{\pm}\right)$ FI

$$\begin{aligned}m = \lim_{x\to+\infty} x\arctan\left(\tfrac{1}{1+x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\frac{1}{x}}\\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x)^2+1} = 1\end{aligned}$$

même résultat pour $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$

$$p = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\arctan\left(\tfrac{1}{1+x}\right) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty}\overbrace{\left(\arctan\left(\tfrac{1}{1+x}\right)-\tfrac{1}{x}\right)}^{\to 0} = (+\infty)\,(0)\text{ FI}$$

$$\begin{aligned}p = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} &\overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}\\ &= -1\end{aligned}$$

Le graphe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x-1$

Il reste à vérifier la présence d'une AH ou d'un point creux en $x=0$

limite à gauche :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} x^2 \arctan\left(\tfrac{1}{1+x}\right) &= (1)\left(\arctan\left(\tfrac{1}{0^-}\right)\right)\\ &= (1)\left(\arctan(-\infty)\right) = -\tfrac{\pi}{2}\end{aligned}$$

limite à droite :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+} x^2 \arctan\left(\tfrac{1}{1+x}\right) &= (1)\left(\arctan\left(\tfrac{1}{0^+}\right)\right)\\ &= (1)\left(\arctan(+\infty)\right) = +\tfrac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : Le graphe de la fonction admet deux demi-points creux en $(-1^-, -\pi/2)$ et $(-1^+, \pi/2)$.

5 Rechercher le domaine d'existence de la fonction

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Le graphe de cette fonction possède-t-elle une ou plusieurs asymptotes ? Justifier par calcul de limite (notation précise exigée !)

Solution: CE : $-1 \le \frac{1}{x-1} \le 1 \iff x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$

rem : $f(0) = \arccos(-1) = \pi$ et $f(2) = \arccos(1) = 0$: pas de limite à calculer ni en 0, ni en 2.

$\lim_{x\to-\infty} \arccos\left(\frac{1}{x-1}\right) = \arccos 0^- = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} \arccos\left(\frac{1}{x-1}\right) = \arccos 0^+ = \frac{\pi}{2}$

Conclusion : le graphe de la fonction admet une AH (identique à droite et à gauche) d'équation $y = \frac{\pi}{2}$

6 Calculs de limites supplémentaires

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\arctan(x)}\right)$

Solution:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{\arctan(x)}\right) = (\infty - \infty) &= \lim_{x\to 0} \tfrac{\arctan(x) - x}{x\ \arctan(x)} = \tfrac{0}{0}\\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{(1+x^2)\arctan(x) + x}\\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{2x\cdot\arctan(x) + 1 + 1} = 0\end{aligned}$$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

Solution: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty \quad (\Longrightarrow \mathrm{AV}_d \equiv x = 0)$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x^2}{(\arcsin x)^2}$

Solution: $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x^2}{(\arcsin x)^2} = \frac{0}{0}$ FI

1. $\left(\arcsin x^2\right)' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
2. $\left((\arcsin x)^2\right)' = \frac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \tfrac{\arcsin x^2}{(\arcsin x)^2} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\arcsin(x)\sqrt{1-x^4}} = \tfrac{0}{0}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin(x)} \cdot \overbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}}^{=1}\\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2} = 1\end{aligned}$$