1 Simplifie. Valeurs exactes exigées.

(a) $\arccos(\cos 3\pi)$
(b) $\arcsin(\sin(3\pi))$
(c) $\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$
(d) $\arccos\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)$
(e) $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
(f) $\arccos\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$
(g) $\arccos(\sin 3\pi)$
(h) $\arccos\left(\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$
(i) $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

Solution:

(a) $\arccos(\cos 3\pi) = \pi$
(b) $\arcsin(\sin(3\pi)) = 0$
(c) $\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
(d) $\arccos\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right) = \pi$
(e) $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{2}$
(f) $\arccos\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{2\pi}{3}$
(g) $\arccos(\sin 3\pi) = \dfrac{\pi}{2}$
(h) $\arccos\left(\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
(i) $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2 Calculer la valeur exacte des expressions suivantes :

a) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$
b) $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$
c) $\tan(\arctan 3 + \arctan 7)$
d) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

Solution:

a) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right) = \frac{33}{65}$
Soit $\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ et $\beta = \arccos\left(-\frac{5}{13}\right)$. Alors $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ et $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ et aussi $\cos\beta = -\frac{5}{13}$ et $\sin\beta = \frac{12}{13}$.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right) &= \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
&= \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{33}{65}
\end{aligned}$$

b) $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right) =$
Soit $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\beta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$. Alors $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ et $\cos\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$ et, de même, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$ et $\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right) &= \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
&= \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}
\end{aligned}$$

c) $\tan(\arctan 3 + \arctan 7) = -\frac{1}{2}$
Soient $\alpha = \arctan 3$ et $\beta = \arctan 7$. On a $\tan\alpha = 3$ et $\tan\beta = 7$. On demande de calculer $\tan(\alpha+\beta)$.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{3+7}{1-3\cdot 7} = -\frac{1}{2}$$

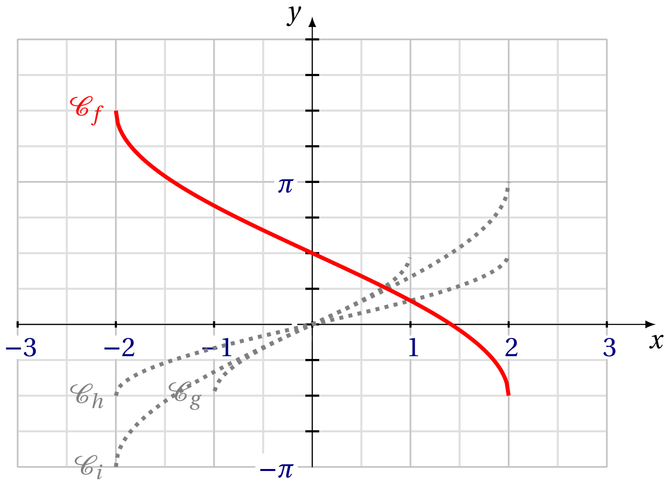
d) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right)=$
Soient $\alpha=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\beta=\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)$. Alors $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ et, donc, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; de même : $\sin\beta=\frac{3}{4}$ et ainsi $\cos\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right) &= \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

3 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto \frac{\pi}{2}-2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

(a) Par manipulation du graphique d'une fonction cyclométrique bien choisie, dessiner celui de f.

Solution: $g(x)=\arcsin(x)$; $h(x)=\arcsin(x/2)$; $i(x)=2\arcsin(x/2)$



(b) Quel est le domaine de définition de f ?

Solution: **dom** $f=[-2;2]$

(c) Quel est l'ensemble image de f ?

Solution: **im** $f=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

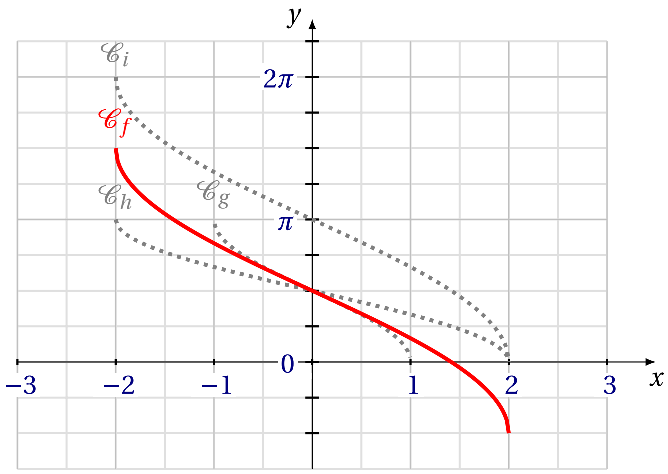
(d) Indique l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>0$. Tu peux donner la réponse directement en t'aidant du graphe de f.

Solution: S=$[-2;\sqrt{2}[$

4 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto 2\arccos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\pi}{2}$

(a) Par manipulation du graphique d'une fonction cyclométrique bien choisie, dessiner celui de f.

Solution: $g(x)=\arccos(x)$; $h(x)=\arccos(x/2)$; $i(x)=2\arccos(x/2)$



(b) Quel est le domaine de définition de f ?

Solution: $\textbf{dom}\, f = [-2;2]$

(c) Quel est l'ensemble image de f ?

Solution: $\textbf{im}\, f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

(d) Quelles sont les racines de f ?

Solution: $2\arccos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 0 \iff \arccos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \iff \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

racine de f : $x = \sqrt{2}$

5 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\; x \longmapsto \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. **Dessiner** au crayon, dans le repère cartésien ci-dessous, le graphe de f puis **déterminer** l'intervalle $J = f^{-1}\left(\left]\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]\right)$. Les valeurs numériques des **bornes** de J seront données sous forme fractionnaire.

Solution: $J = \left[-1; \sqrt{3}\right[$