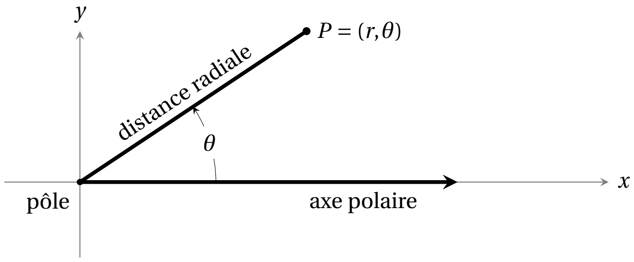
Dans le système de coordonnées polaires, chaque point est représenté par un couple (r,θ), où r désigne la distance radiale entre le point et le pôle (l'origine des coordonnées) et θ représente l'angle, mesuré dans le sens trigonométrique (antihoraire), entre l'axe polaire (axe des abscisses positifs) et la droite joignant le pôle au point.



Le point P pour coordonnées cartésiennes (x,y) et pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ où :

- r est le rayon polaire
- θ est l'angle polaire

Système de conversion

Pour convertir les coordonnées polaires en coordonnées rectangulaires et inversement, on utilise les formules suivantes :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \leftrightarrows \begin{cases} r^2 = x^2+y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Il faut tenir compte du quadrant dans lequel se trouve le point lors du calcul de θ à partir de cette identité.

Note : Le pôle possède une infinité de coordonnées polaires : $O=(0;\theta)$

Exemple : Convertir le point $(1,2)$ en coordonnées polaires.

Soit $x=1$ et $y=2$, la valeur de r est obtenue via $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

La valeur de θ est $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{2}{1} \implies \theta=\arctan(2)$.

Le point est dans le premier quadrant, donc la fonction arctan donne la bonne valeur pour θ.

La coordonnée polaire du point $(1,2)$ est $\left(\sqrt{5},\arctan(2)\right)$.

Exercice : Vérifier que $P=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(1;\frac{11\pi}{6}\right)$

Exemple : Convertir $\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$ en coordonnées rectangulaires.

Soit $r=4$ et $\theta=\frac{\pi}{4}$.

On trouve : $x=r\cos\theta=4\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$ et $y=2\sqrt{2}$

La coordonnée cartésienne du point $\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$ est $\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$.

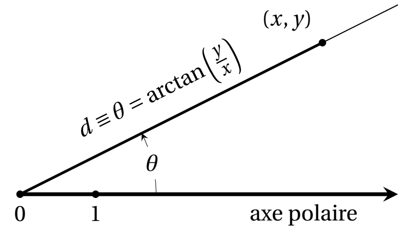
Équation d'une droite en coordonnée polaire

- En coordonnée rectangulaire (cartésienne), la relation liant x et y de chacun de ses points (x,y) est $d \equiv y=ax+b$

  si d passe par l'origine : $d \equiv y=ax$

— Une droite a une équation très simple en forme polaire, à condition que la droite passe par le pôle

L'équation générale d'une droite passant par le pôle est $\theta = \alpha$, où α est l'angle que la droite forme avec l'axe x-positif.



On note que toute droite $\theta = \alpha + \pi k$ est la même que la droite $\theta = \alpha$ pour tout entier k.

— Droites ne passant pas par l'origine :

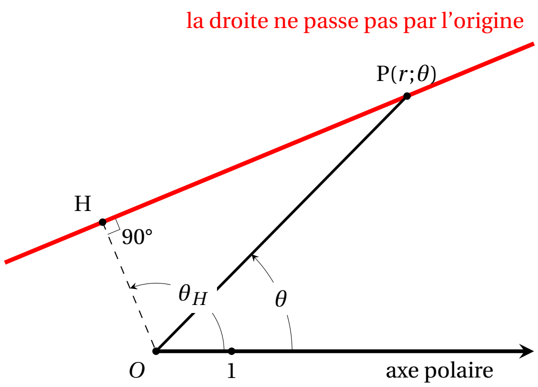
Une équation du type $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, est l'équation cartésienne d'une droite. Réciproquement, toute droite du plan admet une équation de cette forme.

$$\begin{aligned} ax + by + c = 0 &\iff a \cdot r\cos\theta + b \cdot r\sin\theta + c = 0 \\ &\iff r = \frac{-c}{a\cos\theta + b\sin\theta} \\ &\iff r = \frac{1}{m \cdot \cos\theta + n \cdot \sin\theta} \end{aligned}$$

Proposition 1 *Soient (r_H, θ_H) les coordonnées polaires du projeté orthogonal H de l'origine O du repère sur la droite d. Alors,*

$$m = \frac{1}{r_H}\cos\theta_H \text{ et } n = \frac{1}{r_H}\sin\theta_H$$

Preuve 1 *Considérons le triangle OHP représenté dans la figure ci-dessous :*



Pour tout point $P \in d$, le triangle OHP est rectangle en H. Par conséquent, on a :

$$\cos(\theta_H - \theta) = \frac{r_H}{r}$$

ce qui donne

$$r = \frac{r_H}{\cos(\theta_H - \theta)}$$

En utilisant la formule d'addition pour le cosinus, on a :

$$r = \frac{r_H}{\cos(\theta_H)\cos(\theta) + \sin(\theta_H)\sin(\theta)}$$

ou bien

$$r = \frac{1}{\frac{1}{r_H}\cos(\theta_H)\cos(\theta) + \frac{1}{r_H}\sin(\theta_H)\sin(\theta)}$$

Ainsi, si (r_H, θ_H) sont les coordonnées polaires du projeté orthogonal H de l'origine O sur la droite d, alors on a bien :

$$m = \frac{1}{r_H}\cos\theta_H \quad et \quad n = \frac{1}{r_H}\sin\theta_H$$

Cas particuliers :

1. droite parallèle et au-dessus de l'axe polaire : $H = (r_h; 90°)$

$$d \equiv r = \frac{r_H}{\sin(\theta)}$$

2. droite parallèle et en-dessous de l'axe polaire : $H = (r_h; 270°)$

$$d \equiv r = -\frac{r_H}{\sin(\theta)}$$

3. droite perpendiculaire à l'axe polaire et à droite du pôle : $H = (r_h; 0°)$

$$d \equiv r = \frac{r_H}{\cos(\theta)}$$

4. droite perpendiculaire à l'axe polaire et à gauche du pôle : $H = (r_h; 180°)$

$$d \equiv r = -\frac{r_H}{\cos(\theta)}$$

Exercices

1 Calculer la coordonnée polaire du point symétrique par rapport au pôle du point $A = \left(3; \frac{5\pi}{6}\right)$ et du point $B = \left(1; -\frac{4\pi}{3}\right)$

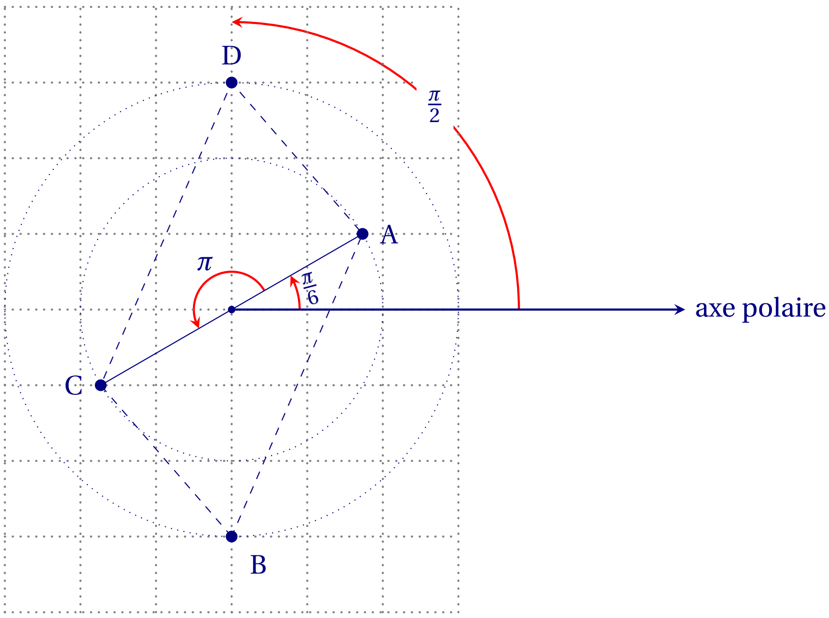
Solution: $A' = \left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$ et $B' = \left(1; -\frac{\pi}{3}\right)$

2 On donne le parallélogramme ABCD tel que la coordonnée polaire du point $A = \left(2; \frac{\pi}{6}\right)$ et du point $B = \left(3; -\frac{\pi}{2}\right)$. Sachant que le pôle est le point d'intersection des diagonales de ce parallélogramme, calculer les coordonnées polaires des sommets C et D

Solution:

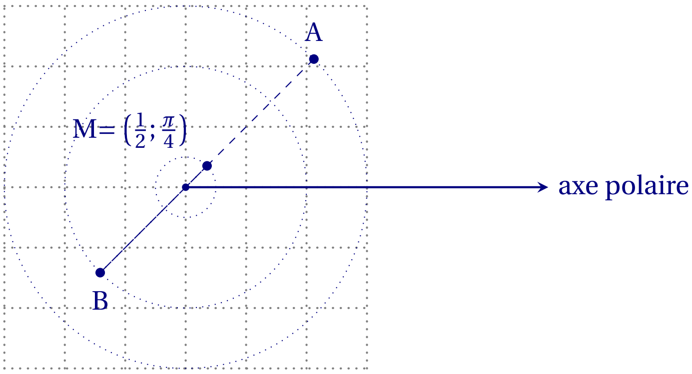
— C est le point symétrique de A : $C = \left(2; \frac{7\pi}{6}\right)$

— D est le point symétrique de B : $D = \left(3; \frac{\pi}{2}\right)$



3 Déterminer, sans calculs, les coordonnées polaires du milieu du segment [A,B] lorsque les coordonnées polaires de $A = \left(3; \frac{\pi}{4}\right)$ et celle de $B = \left(2; -\frac{3\pi}{4}\right)$.

Solution:



4 Équations de la droite d sachant que :

(a) d comprend $A = \left(1; \frac{2\pi}{3}\right)$ et est à une distance de 1 unité du pôle.

Solution:

♡ $A = \left(1; \frac{2\pi}{3}\right) \implies r_H = 1, \quad \theta_H = \frac{2\pi}{3}$

♡ $d \equiv r = \frac{1}{\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)}$

$= \frac{1}{\cos\theta \cos\frac{2\pi}{3} - \sin\theta \sin\frac{2\pi}{3}}$

♡ $d \equiv \frac{1}{r} = -\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$

(b) d est parallèle à l'axe polaire et passe par le point $A = \left(2; \frac{\pi}{6}\right)$.

Solution: $d \equiv \frac{1}{r} = \sin\theta$

(c) d est perpendiculaire à l'axe polaire et passe par le point $A = \left(5; \frac{5\pi}{6}\right)$.

Solution: $d \equiv \frac{1}{r} = -\frac{2\sqrt{3}}{15}\cos\theta$

(d) d passe par les points $A = \left(2; \frac{\pi}{2}\right)$ et $B = \left(1; -\frac{\pi}{3}\right)$. note : $d \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{r} & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \frac{1}{r_A} & \cos(\theta_A) & \sin(\theta_A) \\ \frac{1}{r_B} & \cos(\theta_B) & \sin(\theta_B) \end{vmatrix} = 0$

Solution: $d \equiv \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{3}+4}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$

5 Soit d parallèle à l'axe polaire et passant par $\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$. Donner l'équation de d.

6 Soit d perpendiculaire à l'axe polaire et passant par $\left(5; \frac{5\pi}{6}\right)$. Donner l'équation de d.

Même question si d passe par $\left(3; \frac{7\pi}{6}\right)$.

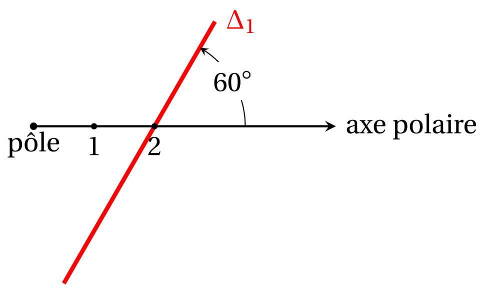
7 Rechercher l'équation polaire de la droite d passant par les points $\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(1; -\frac{\pi}{3}\right)$.

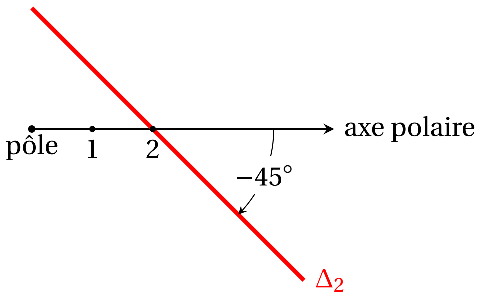
8 Rechercher l'équation polaire de la droite d passant par le point $P = \left(2; \frac{\pi}{6}\right)$ et qui forme avec l'axe polaire un angle d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$.

9 Représenter les droites suivantes :

$$d_1 \equiv r = \frac{2}{\cos(\theta)},\ d_2 \equiv r = \frac{1}{\sin(\theta)},\ d_3 \equiv r = \frac{-3}{\cos(\theta)} \text{ et } d_4 \equiv r = \frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)}.$$

10 Quelles sont les équations polaires des deux droites représentées ci-dessous ?





11 Représenter $\Gamma_1 \equiv r = 1 + 2\sin(\theta)$ et $\Gamma_2 \equiv r = 2 + \cos(\theta)$