1 EPL, UCL, LLN, JUILLET 2024

Dans la suite sont proposées 5 questions courtes auxquelles il vous est demandé de donner **uniquement la réponse finale**. Chaque question compte pour $\frac{1}{5}$ des points de la question.

(a) Trouvez les solutions dans l'intervalle $]0, \pi[$ de l'équation

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$$

(b) En approximant $\tan(10°)$ par $\frac{9}{50}$, donner une approximation de $\sin(20°)$ sous forme d'une fraction.

(c) Dans un triangle quelconque ABC, l'angle $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ et le côté AC mesure 2 cm.
L'aire de ce triangle vaut 3 cm². Donnez une expression algébrique précise BC de la longueur du côté BC, exprimée en cm.

(d) Calculez : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

(e) Calculez : $\arctan(2) - \arctan(-3)$

2 EPL, UCL, LLN, JUILLET 2024 – EPB, ULB, BRUXELLES, JUILLET 2024. – POLYTECH, UMONS, MONS, JUILLET 2024. – FSA, ULIÈGE, LIÈGE, JUILLET 2024.

Soit l'équation trigonométrique :

$$2\sin(2x) + \cos(2x) = -2 \tag{1}$$

(a) Trouvez toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (1).

(b) Dessinez toutes les solutions de (1) sur le cercle trigonométrique.

Méthode : comment rendre une équation trigonométrique homogène en $\sin x$ et $\cos x$?
— Diviser par la plus haute puissance de $\cos x$ et $\sin x$
— Prendre $\tan x$ ou $\cot x$ comme inconnue auxiliaire

3 EPL, UCL, LLN, JUILLET 2024 – EPB, ULB, BRUXELLES, JUILLET 2024. – POLYTECH, UMONS, MONS, JUILLET 2024. – FSA, ULIÈGE, LIÈGE, JUILLET 2024.

Pour quelles valeurs du paramètre réel m, l'équation trigonométrique suivante admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?

$$\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = m$$

Résoudre ensuite cette équation dans $\mathbb{R}$ si $m = \sqrt{3}$ et représenter toutes les solutions sur le cercle trigonométrique.

4 EPL, UCL, LLN, JUILLET 2023 – EPB, ULB, BRUXELLES, JUILLET 2023. – POLYTECH, UMONS, MONS, JUILLET 2023. – FSA, ULIÈGE, LIÈGE, JUILLET 2023.

Trouver toutes les solutions réelles de l'équation :

$$2\cos(3x) - 14\cos(2x) + 34\cos(x) - 22 = 0$$

5 EPL, UCL, LLN, UMONS, JUILLET 2016.

Dans $\mathbb{R}$, trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$$

Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

6 ULB SEPTEMBRE 2016 – EPL, UCL, LLN, JUILLET 2016.

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\cos 3\theta + (1 - \sqrt{3})\cos 2\theta + (1 - \sqrt{3})\cos\theta + 1 = 0$$

Les équations trigonométriques.

1. Type d'équation : $\sin x = a$

   Méthode : $\sin x = a \implies \begin{cases} x = \arcsin a + 2k\pi \\ x = \pi - \arcsin a + 2k\pi \end{cases}$ *Exemple 1 :* $\sin x = \frac{1}{2} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

2. Type d'équation : $\cos x = a$

   Méthode : $\cos x = a \implies x = \pm \arccos a + 2k\pi$ *Exemple 2 :* $\cos x = \frac{1}{2} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

3. Type d'équation : $\tan x = a$

   Méthode : $\tan x = a \implies x = \arctan a + k\pi$ *Exemple 3 :* $\tan x = 1 \implies x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

4. Type d'équation : $\sin x = \sin a$

   Méthode : $\sin x = \sin a \implies \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$ *Exemple 4 :* $\sin x = \sin \frac{\pi}{7} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \\ x = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi \end{cases}$

   Exemple 5 : $\sin 3x = \cos \frac{\pi}{3}$
   $\implies \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6}$
   $\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \implies x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \implies x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

5. Type d'équation : $\cos x = \cos a$

   Méthode : $\cos x = \cos a \implies x = \pm a + 2k\pi$ *Exemple 6 :* $\cos x = \cos \frac{\pi}{7} \implies x = \pm \frac{\pi}{7} + 2k\pi$

   Exemple 7 :
   $$\begin{aligned} \cos^2 x = \sin^2 x + \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &\iff \cos 2x = \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) \\ &\iff 2x = \pm\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

6. Type d'équation : $\tan x = \tan a$

   Méthode : $\tan x = \tan a \implies x = \pm a + k\pi$ *Exemple 8 :* $\tan x = \tan \frac{\pi}{7} \implies x = \frac{\pi}{7} + k\pi$

   Exemple 9 :
   $$\begin{aligned} 2\tan x = \left(1 - \tan^2 x\right) \cdot \tan\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) &\iff \tfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \tan\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) \\ &\iff \tan 2x = \tan\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) \\ &\iff 2x = x - \tfrac{\pi}{3} + k\pi \\ &\iff x = -\tfrac{\pi}{3} + k\pi \end{aligned}$$

7. Équation homogène en $\sin x$ et $\cos x$

   Méthode :
   — Diviser par la plus haute puissance de $\cos x$ et $\sin x$
   — Prendre $\tan x$ ou $\cot x$ comme inconnue auxiliaire

   Exemple 10 :
   $$\begin{aligned} 2\sin^2 t - 4\sin t \cos t - 4\cos^2 t = -3 &\iff 2\sin^2 t - 4\sin t\cos t - 4\cos^2 t = -3\sin^2 t - 3\cos^2 t \\ &\iff 5\sin^2 t - 4\sin t\cos t - \cos^2 t = 0 \\ &\iff 5\tan^2 t - 4\tan t - 1 = 0 \\ &\iff \tan t = \tfrac{+2 \pm \sqrt{9}}{5} \iff \begin{cases} \tan t = 1 & \implies t = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan t = \frac{-1}{5} & \implies t = 0.1974 \pm k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

8. Type d'équation : $a\cos x + b\sin x = c$

   Méthode 1 : $a\cos x + b\sin x = \frac{a}{\cos\varphi}\cos(x - \varphi)$ avec $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

   Exemple 11 : $3\cos x + \sin x + 3 = 0$ avec $\tan\varphi = \frac{1}{3} \implies \varphi = 0.322 \implies \cos\varphi = 0.9487$

   $$\begin{aligned} 3\cos x + \sin x + 3 = 0 &\iff \frac{3}{0.9487}\cos(x - 0.322) = -3 \\ &\iff \cos(x - 0.322) = -0.9487 \\ &\iff x - 0.322 = \pm 2.82 + 2k\pi \\ &\iff \begin{cases} x = 3.142 + 2k\pi \approx \pi + 2k\pi \\ x = -2.498 + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Variante de la méthode 1 : $a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\varphi)$ où $r\,\mathrm{cis}(\varphi) = a + ib \implies \begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \tan\varphi = \frac{b}{a} \end{cases}$

Exemple 12 : Reprenons l'exemple précédent
$3\cos x + \sin x + 3 = 0$ où $r = \sqrt{10},\ \tan\varphi = \frac{1}{3} \implies \varphi = 0.322$

$$\begin{aligned} 3\cos x + \sin x + 3 = 0 &\iff \sqrt{10}\cos(x-0.322) = -3 \\ &\iff \cos(x-0.322) = -0.9487 \\ &\iff x - 0.322 = \pm 2.82 + 2k\pi \\ &\iff \begin{cases} x = 3.142 + 2k\pi \approx \pi + 2k\pi \\ x = -2.498 + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Méthode 2 : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\varphi)$ avec $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ou bien $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemple 13 : Toujours avec le même exemple
$3\cos x + \sin x + 3 = 0$ avec $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \implies \varphi = 1.249$

$$\begin{aligned} 3\cos x + \sin x + 3 = 0 &\iff \sqrt{3^2+1^2}\ \sin(x+1.249) = -3 \\ &\iff \sin(x+1.249) = -0.9487 \\ &\iff \begin{cases} x + 1.249 = -1.249 + 2k\pi \\ x + 1.249 = \pi + 1.249 + 2k\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -2.498 + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

9. Cas général
   Méthode :
   — On effectue les transformations de manière à créer des facteurs communs parmi les différents termes.
   — On factorise.
   — On traite séparément chaque facteur.

Exemple 14 : $4\sin 2x + 6\cos x = 0 \iff 8\sin x\cos x + 6\cos x = 0$

$$\begin{aligned} &\iff 2\cos x(4\sin x + 3) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin x = -\frac{3}{4} \iff \begin{cases} x = -0.848 + 2k\pi \\ x = 3.90 + 2k\pi \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 15 : $\frac{\cot x - \cos x}{\cot x + \cos x} = 2(1-\sin x)$

$$\text{CE : } \begin{cases} \sin x \neq 0 \iff x \neq 0^\circ + k180^\circ \\ \cot x + \cos x \neq 0 \iff \cos x \neq 0 \iff x \neq 90^\circ + k180^\circ \end{cases}$$

— le numérateur du membre de droite : $\cot x - \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x = \frac{1-\sin x}{\sin x}$
— le dénominateur du membre de droite : $\cot x + \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x = \frac{1+\sin x}{\sin x}$

$$\frac{\cot x - \cos x}{\cot x + \cos x} = \frac{\frac{1-\sin x}{\sin x}}{\frac{1+\sin x}{\sin x}} = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$$

L'équation devient : $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 2(1-\sin x)$
Or $\sin x \neq 1$ en vertu des CE. on peut donc simplifier par $1 - \sin x$

$$\frac{1}{1+\sin x} = 2 \overset{\sin x \neq -1}{\iff} 2\sin x = -1 \iff \sin x = -\frac{1}{2}$$

Sol. $x = -30^\circ + k360^\circ$ ou $x = 210^\circ + k360^\circ$