1 Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution:

— On a

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 1\cdot 5 - (-1)\cdot(-2) = 3.$$

— On a

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 + L_3\text{).}$$

Ensuite :

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

en développant le déterminant selon la première ligne.

2 Factoriser le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix}.$$

Solution:

— On a

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2 - 4 = (1-x-2)(1-x+2) = (x-1)(3-x).$$

— On a

$$\det\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix} = xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

mise en évidence du facteur x sur L_1, y sur L_2 et z sur L_3

Ensuite :

$$= xyz\begin{vmatrix} 0 & x-z & x^2-z^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad \text{(si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 - L_3 \text{ et } L_2 \text{ par } L_2 - L_3\text{).}$$

Puis :

$$= xyz(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+z \\ 0 & 1 & y+z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad \left(\text{mise en évidence du facteur } \begin{cases} x-z & \text{sur } L_1 \\ y-z & \text{sur } L_2 \end{cases}\right).$$

Enfin :

$$\begin{aligned} &= xyz(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+z \\ 1 & y+z \end{vmatrix} = xyz(x-z)(y-z)\big((y+z)-(x+z)\big) \\ &= xyz(x-z)(y-z)(y-x). \end{aligned}$$

— On a :

$$\det\begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -x & a & 0 \\ -x & -2b-x & b \\ -x & a & -a-x \end{vmatrix}$$

si on remplace C_1 par $C_1+C_2+C_3$

Ensuite :

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & -2b-x & b \\ -x & a & -a-x \end{vmatrix} \quad \text{(si on remplace } L_1 \text{ par } L_1-L_3\text{).}$$

Puis :

$$= (a+x)\begin{vmatrix} -x & -2b-x \\ -x & a \end{vmatrix} \quad \text{(en développant le déterminant selon la première ligne).}$$

Ensuite :

$$= -x(a+x)\begin{vmatrix} 1 & -2b-x \\ 1 & a \end{vmatrix} \quad \text{(mise en évidence du facteur } (-x) \text{ sur } C_1\text{).}$$

Finalement :

$$= -x(a+x)(a+2b+x).$$

3 Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution:

— Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Puisque $\det A = 2-1 = 1 \neq 0$, la matrice A est inversible.

Déterminons les cofacteurs $(A)_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j}$, $(i,j=1,2)$ de A.

On a $(A)_{1,1}=2$, $(A)_{1,2}=1$, $(A)_{2,1}=1$, $(A)_{2,2}=1$.

On obtient ainsi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

— Posons $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$. On a

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&1&1\end{vmatrix} \quad \text{si on remplace } L_3 \text{ par } L_3-L_1\\
&= \begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&0\end{vmatrix} \quad \text{en développant le déterminant selon la première colonne}\\
&= 1\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix}=1.
\end{aligned}
$$

Puisque $\det A\neq 0$, la matrice inverse existe.
Déterminons les cofacteurs $(A)_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j}$, $(i,j=1,2,3)$ de A. On a

$$(A)_{1,1}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2;\quad (A)_{1,2}=(-1)\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}=-1;\quad (A)_{1,3}=\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=-1;$$

$$(A)_{2,1}=(-1)\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=1;\quad (A)_{2,2}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0;\quad (A)_{2,3}=(-1)\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1;$$

$$(A)_{3,1}=\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}=-1;\quad (A)_{3,2}=(-1)\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=1;\quad (A)_{3,3}=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1.$$

Ainsi, on obtient

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\text{adj } A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&0&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

4 Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha\in\mathbb{R}$) :

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\\sin\alpha&-\cos\alpha\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}.$$

Solution: Les matrices inverses sont

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&\sin(\alpha)\\\sin(\alpha)&-\cos(\alpha)\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&2&6\\1&1&2\\2&2&5\end{pmatrix}.$$

5 Si a est un réel donné, déterminer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix}1&a&a^2\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Solution: L'inverse de la matrice donnée est

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 Démontrer que si A est une matrice carrée qui vérifie $A^2 - A + I = 0$ alors A est inversible et déterminer son inverse en fonction de A.

Solution: $$\begin{aligned} A^2 - A + I = 0 \iff A^{-1}\left(A^2 - A + I\right) = 0 &\iff A - I + A^{-1} = 0 \\ &\iff A^{-1} = I - A \end{aligned}$$