1 Soient F et G les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (x-3)(2x^2-4x+3) \qquad \text{et} \qquad G(x) = 2x^3-10x^2+15x.$$

(a) i. Pour tout réel x, déterminer $F'(x)$ et $G'(x)$ puis comparer ces expressions.
ii. Comparer aussi les expressions $F(x)$ et $G(x)$.

(b) Que pensez-vous de la phrase suivante :
« On appelle primitive d'une fonction f, définie et continue sur un intervalle I, la fonction F, définie et dérivable sur I telle que $F' = f$. » ?

Solution : réalisé en classe (montrer qu'il n'existe pas une seule primitive d'une fonction continue)

2 Dans chacun des cas suivants, déterminer <u>une</u> primitive de f sur l'intervalle donné.

(a) $f : x \mapsto x^3 - 1$ sur $\mathbb{R}$

(b) $f : x \mapsto \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_0^+$

(c) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_0^+$

(d) $f : x \mapsto -\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

(e) $f : x \mapsto \frac{1}{x^6}$ sur $\mathbb{R}_0^-$

(f) $f : x \mapsto \frac{4}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_0^+$

Solution :

(a) $F(x) = \frac{x^4}{4} - x$ sur $\mathbb{R}$

(b) $F(x) = 2\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_0^+$

(c) $F(x) = -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_0^+$

(d) $F(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

(e) $F(x) = -\frac{1}{5x^5}$ sur $\mathbb{R}_0^-$

(f) $F(x) = 8\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_0^+$

3 Déterminer <u>toutes</u> les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

(a) $f : x \mapsto x^2 + x^3$ sur $\mathbb{R}$

(b) $f : x \mapsto \frac{1}{x} + 1$ sur $]0;+\infty[$

(c) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

(d) $f : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

Solution :

(a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + k,\ k \in \mathbb{R}$

(b) $F(x) = \ln(x) + x + k,\ k \in \mathbb{R}$

(c) $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + k,\ k \in \mathbb{R}$

(d) $F(x) = -\cos(x) - \sin(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$

4 **Reconnaissance de forme (substitution)** : Dans chacun des cas suivants, déterminer <u>une</u> primitive de f.

(a) $f : x \mapsto 2x(x^2+1)^2$

(b) $f : x \mapsto \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

(c) $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

(d) $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(e) $f : x \mapsto e^{1-2x}$

(f) $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$

Solution :

(a) $F(x) = \dfrac{1}{3}(x^2+1)^3$

(b) $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$

(c) $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

(d) $F(x) = -\sqrt{1-x^2}$

(e) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-2x}$

(f) $F(x) = \ln(e^x - 1)$

5 **Primitives avec condition initiale :** Pour chacune des fonctions f suivantes, donner une primitive F vérifiant la condition imposée.

(a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $F(-2) = 0$.

(b) f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{3}{x^3}$ et $F(-1) = 1$.

(c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$; $F(2) = 3$;

(d) f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x - 5 + \dfrac{3}{x^2}$; $F(3) = -1$.

Solution :

(a) $\displaystyle\int 3x^2 + 2x - 1 \,\mathrm{d}x = x^3 + x^2 - x + C$

$$F(-2) = 0 \iff x^3 + x^2 - x + C\Big|_{x=-2} = 0 \iff -2 + C = 0$$

d'où $F(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

Notation :

$f(x)\Big|_{x=a}$ signifie qu'on évalue la fonction f en le réel a ou encore $f(a) = f(x)\Big|_{x=a}$

(b) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2x^2} - 1$

(c) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - x - \dfrac{11}{3}$

(d) $F(x) = x^2 - 5x - \dfrac{3}{x} + 6$

6 ***Rappels de physique*** *: dans un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA), laccélération est la dérivée seconde de la distance $x(t)$, notée $x''(t)$. En effet, laccélération est la dérivée de la vitesse et la vitesse est la dérivée de la distance.*

Sachant que la vitesse d'une particule se déplaçant le long de l'axe x en fonction du temps t est donnée par l'équation $v = x' = 2t + 5$, trouve la position cette particule au temps t, si $x = 2$ quand $t = 0$.

Solution : On choisit un point sur l'axe des abscisses pour définir l'origine et on suppose le sens positif de parcours vers la droite. Au temps $t = 0$, la particule est donc située à 2 unités vers la droite de l'origine.

Comme $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 5$, on peut écrire $\mathrm{d}x = (2t+5)\,\mathrm{d}t$. On obtient donc :

$$x(t) = \int (2t+5)\,\mathrm{d}t = t^2 + 5t + C$$

En remplaçant x par 2 et t par 0 dans l'équation ci-dessus, on trouve l'équation horaire du mouvement de la particule : $x(t) = t^2 + 5t + 2$

7 Une voiture accélère de $2t + 60$ centimètre par seconde carré, (où t représente la durée en secondes). De combien de centimètres par seconde la vitesse de la voiture augmente-t-elle entre $t = 5$ et $t = 15$

Solution : Soit v la fonction qui au nombre t de secondes écoulées depuis $t = 0$, fait correspondre la vitesse de la voiture.
D'après la donnée, $a(t) = v'(t) = 2t + 60$.
Par conséquent, $v(t) = t^2 + 60t + C$ (primitivation)

On recherche $v(15) - v(5)$, l'augmentation de la vitesse de la voiture entre les moments $t = 5$ et $t = 15$:

$$v(15) = 15^2 + 60 \times 15 + C = 1125 + C$$
$$v(5) = 5^2 + 60 \times 5 + C = 325 + C$$

d'où $v(15) - v(5) = 800 \text{ cm/s}^2$

8 Calculs d'intégrales indéfinies :

(a) $\displaystyle\int x^5 \, dx$

(b) $\displaystyle\int 4x^3 \, dx$

(c) $\displaystyle\int 3x \, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{x} \, dx$

Solution :

(a) $\displaystyle\int x^5 \, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$

(b) $\displaystyle\int 4x^3 \, dx = 4\int x^3 \, dx = 4\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = x^4 + 4C$ mais si on renomme la constante $4C$ par C_1, alors C_1 représente aussi une constante arbitraire ; on peut donc tout simplement écrire $\int 4x^3 \, dx = x^4 + C$

(c) $\displaystyle\int 3x \, dx = 3\int x \, dx = 3 \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{3}{2}x^2 + C$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3} = \int \frac{1}{x^3} \, dx = \int x^{-3} \, dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

9 **Intégrales indéfinies :** (opération sur l'intégrande)

(a) $\displaystyle\int \left(5x^4 - 3x^2 + 2x - 1\right) dx$

(b) $\displaystyle\int \left(x^5 + 4x^3 + 3x\right) dx$

(c) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} + \sin x\right) dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2-5}{x^3}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \left(4\mathbf{e}^x+5\cdot 2^x\right)\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{1-\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int (x-2)(x+3)\,\mathrm{d}x$

Solution :

(a) $\displaystyle 5\int x^4\,\mathrm{d}x-3\int x^2\,\mathrm{d}x+2\int 2x\,\mathrm{d}x-\int 1\,\mathrm{d}x=x^5-x^3+x^2-x+C$

(b) $\displaystyle\int \left(x^5+4x^3+3x\right)\mathrm{d}x=\int x^5\,\mathrm{d}x+\int 4x^3\,\mathrm{d}x+\int 3x\,\mathrm{d}x=\frac{x^6}{6}+x^4+\frac{3x^2}{2}+C$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x+\int \sin(x)\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x+\int \sin(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\cos(x)+C$

(d)
$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-3x^2-5}{x^3}\,\mathrm{d}x&=\int \frac{x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}-\frac{5}{x^3}\,\mathrm{d}x\\&=\int 1-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^3}\,\mathrm{d}x\\&=\int 1\,\mathrm{d}x-\int\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{5}{x^3}\,\mathrm{d}x\\&=x-3\ln|x|+\frac{5}{2x^2}+C\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int \left(4\mathbf{e}^x+5\cdot 2^x\right)\mathrm{d}x=4\mathbf{e}^x+\frac{5\cdot 2^x}{\ln 2}+C$

(f) $\displaystyle\int \frac{1-\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$

(g) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x=2x^{\frac{3}{2}}-5x+C$

(h) $\displaystyle\int (x-2)(x+3)\,\mathrm{d}x=\int \left(x^2+x-6\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+C$

10 ***Réflexion*** : Chaque point d'une courbe admet une tangente dont la pente est égale l'abscisse de son point multipliée par 8. Recherche l'équation cartésienne de cette courbe si on sait qu'elle contient le point $(1,3)$.

Solution : Soit $y=f(x)$ l'équation cartésienne de la courbe. f vérifie $f'(x)=8x$.

D'où : $y=\int 8x\,\mathrm{d}x=4x^2+C$. C'est une famille de parabole.

On recherche celle qui passe par la point $(1,3)$: $3=4(1)^2+C$.

La courbe a pour équation $y=4x^2-1$.

11 ***Réflexion*** : Une courbe vérifie $y''=6x-10$. Trouve son équation sachant qu'elle contient le point $(1,1)$ et que la tangente à la courbe en ce point à une pente -1.

Solution :

$y'' = 6x - 10 \implies y' = 3x^2 - 10x + C_1$ et $y'(1) = -1$ d'où $y' = 3x^2 - 10x + 6$

En effet, $-1 = 3 - 10 + C_1 \iff C_1 = 6$.

$y' = 3x^2 - 10x + 6 \implies y = x^3 - 5x^2 + 6x + C_2$ et $y(1) = 1$ d'où $y = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$

En effet, $1 = 1 - 5 + 6 + C_2 \iff C_2 = -1$.