Objectif : Equations - Limites - Technique de dérivation - Étude de fonction - Tangente - Optimisation

Exercices

1 Calculer la valeur exacte des limites suivantes par le biais de la définition du nombre d'Euler.

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$

(e) $\lim\limits_{h\to0}\left(1+2h\right)^{\frac{1}{h}}$

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{n}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x-1}$

2 Définir le nombre d'Euler et donner sa valeur approchée au millième près.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\mathbf{e}\cdot\exp(2x)=\exp(x+2)+\exp(x)-\mathbf{e}$

b) $\exp(2x)=\exp(x+1)+\exp(x)-\mathbf{e}$

c) $\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x}=\dfrac{\mathbf{e}^2+1}{\mathbf{e}}$

4 Rechercher le domaine de définition de $f(x)=\sqrt{\dfrac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x-1}}$

5 Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathbf{e}^x}{x^2}$. Interpréter graphiquement le résultat.

6 Calculez les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

(a) $f(x)=\mathbf{e}^x+x^2+1$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{\mathbf{e}^x}$

(c) $f(x)=\dfrac{\mathbf{e}^x}{x}$

(d) $f(x)=\mathbf{e}^x\cdot\sin(x)$

(e) $f(x)=\dfrac{\mathbf{e}^x+1}{\mathbf{e}^x-1}$

(f) $f(x)=\dfrac{3x+1-\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x}$

(g) $f(x)=x^3\cdot\mathbf{e}^{-x}$

(h) $f(x)=\dfrac{x^2\mathbf{e}^x}{x+1}$

(i) $f(x)=(\mathbf{e}^x)^2+\dfrac{1}{\mathbf{e}^x}$

(j) $f(x)=\mathbf{e}^{4x+1}$

(k) $f(x)=\mathbf{e}^{\cos(x)}$

(l) $f(x)=\mathbf{e}^{5x^3+7x+4}$

(m) $f(x)=\dfrac{\mathbf{e}^{2x}-1}{x}$

7 Compléter chacune des affirmations suivantes par l'une des trois propositions fournies (une seule bonne réponse par question).

(a) Soient a et b deux nombres réels tels que $0<a<b$, alors :

☐ $\dfrac{1}{\mathbf{e}^{a^2}}<\dfrac{1}{\mathbf{e}^{b^2}}$ ☐ $\mathbf{e}^{-\frac{1}{a}}<\mathbf{e}^{-\frac{1}{b}}$ ☐ $-\mathbf{e}^a<-\mathbf{e}^b$

(b) Soient a et b deux nombres réels, $\dfrac{\mathbf{e}^{3a}\times\mathbf{e}^{-5b}}{(\mathbf{e}^{a-b})^2}$ est égal à :

☐ $\dfrac{\mathbf{e}^{\frac{3}{2}a}}{\mathbf{e}^{\frac{5}{2}b}}$ ☐ $-(\mathbf{e}^a+\mathbf{e}^{-3b})$ ☐ $\dfrac{1}{\mathbf{e}^{3b}\times\mathbf{e}^{-a}}$

(c) La limite quand x tend vers $-\infty$ de la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x\mathbf{e}^x}$ est :

☐ 0 ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$

(d) La dérivée de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}\mathbf{e}^{-3x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est :

☐ $-\mathbf{e}^{-3x^2}\left(\frac{6x^2+1}{x^2}\right)$ ☐ $6\mathbf{e}^{-3x^2}$ ☐ $-\frac{1}{x}\mathbf{e}^{-3x^2}$

(e) La fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $x \longmapsto \frac{-2\mathbf{e}^x}{3x+1}$ est :

☐ strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

☐ strictement croissante sur $[0;+\infty[$

☐ strictement croissante sur $\left[0;\frac{2}{3}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$

(f) La fonction $h : x \longmapsto -\frac{3}{2}\mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}$ est solution de l'équation différentielle

☐ $y' + \frac{1}{2}y = 0$ ☐ $y' = -\frac{3}{2}y$ ☐ $y' = y$

8 Vrai ou faux? Justifier.

(a) ____ $\frac{\mathbf{e}^5\mathbf{e}^{-3}}{(\mathbf{e}^{4-1})^2} = \mathbf{e}^{-4}$

(b) ____ Pour tout réel x, $\frac{\mathbf{e}^{3x}\mathbf{e}^{2x^2}}{(3\mathbf{e}^x)^2} = \frac{\mathbf{e}^{5x}}{9}$

(c) ____ Pour tout réel x, $(2\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x})^2 - (\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x})^2 = 3\mathbf{e}^{2x} - 2$

(d) ____ La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\mathbf{e}^{2x} + \mathbf{e}^x + 1}{\mathbf{e}^{2x} + 1}$ est paire

(e) ____ Soient a et b deux réels tels que $a < b$, alors $\sqrt{\frac{1}{\mathbf{e}^{-a}}} > \sqrt{\frac{1}{\mathbf{e}^{-b}}}$

(f) ____ Soit a un nombre réel tel que $1 < a$ et n un entier naturel,
alors $(\mathbf{e}^a)^n \geq \frac{1}{\mathbf{e}^{-n}}$

(g) ____ L'unique solution de l'équation $\mathbf{e}^{2x} - (\mathbf{e}+1)\mathbf{e}^x + \mathbf{e} = 0$ est 0

(h) ____ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathbf{e}^x - x} = 0$

(i) ____ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\mathbf{e}^{-x} - x} = -\infty$

(j) ____ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^{2x} - 1}{2x} = 0$

(k) ____ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\mathbf{e}^{\frac{1}{x^2}} - 1\right) \times x^2 = 1$

(l) ____ f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \mathbf{e}^{2x^2} + \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$, alors $f'(x) = 4x\mathbf{e}^{2x^2} - \frac{1}{x^2}\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$

(m) ____ g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{\mathbf{e}^x + 2}$, alors $g'(x) = \frac{-\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x + 2}$

9 QCM Choix multiples, réponses multiples

note : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$: $y = \mathbf{e}^x \iff x = \ln(y)$

☐ $\mathbf{e}^x = 7$ a pour unique solution $x = \ln 7$

☐ $\mathbf{e}^{2x} + 1 < 0$ n'a pas de solution.

☐ $\mathbf{e}^{-x+2} = \mathbf{e}^{2x-1}$ a pour unique solution $x = 1$

☐ $\mathbf{e}^{2x} - 5\mathbf{e}^x + 6 = 0$ a pour ensemble solution $S = \{0;\ln 6\}$

☐ $\mathbf{e}^{x+1} \geq \frac{2}{\mathbf{e}^x}$ a pour ensemble solution $S = \left[\frac{-1+\ln 2}{2};+\infty\right[$

10 QCM Choix multiples, réponses multiples

- ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{1-x} = 0$
- ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\cdot\mathbf{e}^{-x} = 0$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^{2x}-1}{3x} = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^{x}-3}{\mathbf{e}^{2x}+1} = 1$
- ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathbf{e}^{-x}+x) = 0$

11 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cdot\mathbf{e}^{2x} - 1$

- ☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x+1)\mathbf{e}^{2x}$
- ☐ f est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$
- ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- ☐ l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

12 QCM Choix multiples, réponses multiples

- ☐ $f : x \mapsto x\cdot\mathbf{e}^{x}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \mathbf{e}^{x}$.
- ☐ $f : x \mapsto \mathbf{e}^{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = 2x\cdot\mathbf{e}^{2x}$
- ☐ $f : x \mapsto \frac{\mathbf{e}^{x}+1}{\mathbf{e}^{x}-1}$ définie dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{-2\mathbf{e}^{x}}{(\mathbf{e}^{x}-1)^2}$
- ☐ $f : x \mapsto \sqrt{1+\mathbf{e}^{2x}}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\mathbf{e}^{2x}}}$

13 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ est-elle paire, impaire ou quelconque ? Justifie.

14 Soit $f(x) = \mathbf{e}^{2x} - 3\mathbf{e}^{x} + x + 2$. Détermine l'équation cartésienne de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

15 Rechercher l'équation cartésienne de la tangente au graphe de la fonction

(a) $f(x) = \mathbf{e}^{x^2}$ au point d'abscisse -1

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{\mathbf{e}^{x}}$ au point d'abscisse 3.

16 Etudier les variations de la fonction $f(x) = x^2\cdot\mathbf{e}^{x}$. En déduire **la position** d'extremums éventuels. Vérifier finalement par calcul la présence d'une asymptote horizontale à gauche et donner son équation.

17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbf{e}^{x} - x$

(a) Étudier les variations de f.

(b) En déduire que, pour tout réel x, $\mathbf{e}^{x} > x$

18 Déterminer le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\cdot\mathbf{e}^{x}$. En déduire **la position** d'extremums éventuels.

19 Étudier la concavité de la fonction $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\ x\mapsto x^2\cdot\exp(-2x)$ puis rechercher l'équation cartésienne de la tangente aux points d'inflexions éventuelles.

20 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\ x\mapsto \dfrac{x^2+x}{\mathbf{e}^{x}}$

Vérifie que $f''(x) = \dfrac{x^2-3x}{\mathbf{e}^{x}}$ puis rechercher l'équation cartésienne des tangentes aux points d'inflexion.

21 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x+1+\dfrac{1}{\mathbf{e}^x - 1}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

a) Déterminer la limite de f quand x tend vers 0, x réel positif.
En déduire que $\mathscr{C}$ possède une asymptote dont on précisera l'équation.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Montrer que la droite D d'équation $y = 2x+1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D.

c) Étudier les variations de f. Rechercher les coordonnées des points extrémums locaux éventuels.

22 Étudier la parité et la concavité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto -2x \cdot \exp\left(-x^2\right)$ puis rechercher l'équation cartésienne de la tangente aux points d'inflexions éventuelles.

23 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2+1\right) \cdot \mathbf{e}^x$

(a) Montrer que cette fonction possède deux points d'inflexion. Je dois voir un tableau de signes.

(b) Recherche l'équation cartésienne de la tangente à G_f au point d'abscisse -3.

24 Soit f la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 2+(2-x)\,\mathbf{e}^{2x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère cartésien.

(a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(b) i. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra poser $X = 2x$).

ii. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

iii. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ.

(c) i. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (3-2x)\,\mathbf{e}^{2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

ii. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

(d) i. Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{V}$ au point d'abscisse 0.

ii. Tracer Δ, T, puis $\mathscr{C}$.

25 Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = (x+1) \cdot \mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}$$

(a) Déterminez le domaine de définition et étudiez l'existence de point creux ou d'asymptotes (AV, AH, AO).

(b) Déterminez la dérivée de f et dressez le tableau de variation.

26 ($\star$) En utilisant l'égalité $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e}$, déterminez le réel α pour que

$$L = \lim_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{3}{x}} + \alpha \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} = 0$$

27 ($\star$) Soit $f_m(x) = x + m \cdot \mathbf{e}^{-x}$ (avec m paramètre réel non nul) et soit C_{f_m} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(a) Déterminer le domaine de définition de f_m et étudier le comportement asymptotique de f_m.

(b) Calculer la dérivée première de f_m et ses racines éventuelles. Discuter, en fonction de m, les variations de f_m

(c) Montrer qu'à chaque courbe C_{f_m}, on peut tracer une tangente t_m passant par l'origine du repère. Déterminer les coordonnées du point de contact ainsi qu'une équation de t_m.