Objectif : Equations - Limites - Technique de dérivation - Étude de fonction - Tangente - Optimisation

Exercices

1 Calculer la valeur exacte des limites suivantes par le biais de la définition du nombre d'Euler.

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

Solution: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=\mathbf{e}^2$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$

Solution:
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2\cdot\frac{n}{2}}=\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{2}$$
$$\overset{(n=2m)}{=}\left(\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{2}=\mathbf{e}^2$$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}$

Solution: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}\overset{(h=-\frac{2}{n})}{=}\lim\limits_{h\to0}(1+h)^{-\frac{2}{h}}=\left(\lim\limits_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^{-2}=\mathbf{e}^{-2}=\frac{1}{\mathbf{e}^2}$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$

Solution: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{6\cdot\frac{n}{2}}=\mathbf{e}^6$

(e) $\lim\limits_{h\to0}\left(1+2h\right)^{\frac{1}{h}}$

Solution:
$$\lim_{h\to0}\left(1+2h\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to0}(1+2h)^{\frac{2}{2h}}=\left(\lim_{h\to0}(1+2h)^{\frac{1}{2h}}\right)^{2}\quad\text{changement de variable : } t=2h$$
$$=\left(\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{2}=\mathbf{e}^2$$

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{n}$

Solution: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}=\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^{3}=\mathbf{e}^3$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x-1}$

Solution:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1}}(*)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{12x}{3}}=\mathbf{e}^{12}$$

Rem : $(*)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1}=1$

2 Définir le nombre d'Euler et donner sa valeur approchée au millième près.

Solution: $\mathbf{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ou bien $\mathbf{e} = \lim\limits_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ et $\mathbf{e} \approx 2,718$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\mathbf{e}\cdot\exp(2x) = \exp(x+2) + \exp(x) - \mathbf{e}$

b) $\exp(2x) = \exp(x+1) + \exp(x) - \mathbf{e}$

c) $\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x} = \dfrac{\mathbf{e}^2+1}{\mathbf{e}}$

Solution:

a) $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^{2x} = \mathbf{e}^{x+2} + \mathbf{e}^x - \mathbf{e} \iff \mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^{2x} - \left(\mathbf{e}^2+1\right)\cdot\mathbf{e}^x + \mathbf{e} = 0 \iff \mathbf{e}^{2x} - \left(\mathbf{e}+\dfrac{1}{\mathbf{e}}\right)\cdot\mathbf{e}^x + 1 = 0$

On pose $y = \mathbf{e}^x$: $y^2 - \left(\mathbf{e}+\dfrac{1}{\mathbf{e}}\right)y + 1 = 0$

Somme des racines $= \mathbf{e} + \dfrac{1}{\mathbf{e}}$ et Produit des racines $= 1$

Les racines sont $\dfrac{1}{\mathbf{e}}$ et $\mathbf{e}$, par conséquent $\mathbf{e}^x = \dfrac{1}{\mathbf{e}}$ et $\mathbf{e}^x = \mathbf{e}$. On trouve S=$\{-1\ ;\ 1\}$.

b) $\mathbf{e}^{2x} = \mathbf{e}^{x+1} + \mathbf{e}^x - \mathbf{e} \iff \mathbf{e}^{2x} - (\mathbf{e}+1)\,\mathbf{e}^x + \mathbf{e} = 0$

On pose $y = \mathbf{e}^x$: $y^2 - (\mathbf{e}+1)\,y + \mathbf{e} = 0$

Somme des racines $= \mathbf{e}+1$ et Produit des racines $= \mathbf{e}$

Les racines sont 1 et $\mathbf{e}$, par conséquent $\mathbf{e}^x = 1$ et $\mathbf{e}^x = \mathbf{e}$. On trouve S=$\{0\ ;\ 1\}$.

c) laissé au lecteur

4 Rechercher le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{\dfrac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x - 1}}$

Solution: laissé au lecteur

5 Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^2}$. Interpréter graphiquement le résultat.

Solution: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \dfrac{0^+}{+\infty} = 0$ (pas de forme indéterminée) et le graphe de f admet une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = 0$

6 Calculez les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

(a) $f(x) = \mathbf{e}^x + x^2 + 1$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\mathbf{e}^x}$

(c) $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x}{x}$

(d) $f(x) = \mathbf{e}^x\cdot\sin(x)$

(e) $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x+1}{\mathbf{e}^x-1}$

(f) $f(x) = \dfrac{3x+1-\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x}$

(g) $f(x) = x^3\cdot\mathbf{e}^{-x}$

(h) $f(x) = \dfrac{x^2\mathbf{e}^x}{x+1}$

(i) $f(x) = (\mathbf{e}^x)^2 + \dfrac{1}{\mathbf{e}^x}$

(j) $f(x) = \mathbf{e}^{4x+1}$

(k) $f(x) = \mathbf{e}^{\cos(x)}$

(l) $f(x) = \mathbf{e}^{5x^3+7x+4}$

(m) $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^{2x}-1}{x}$

Solution:

(a) $f(x) = \mathbf{e}^x + x^2 + 1$ et $f'(x) = \mathbf{e}^x + 2x$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\mathbf{e}^x}$ et $f'(x) = -\mathbf{e}^{-x}$

(c) $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x}{x}$ et $f'(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x(x-1)}{x^2}$

(d) $f(x) = \mathbf{e}^x\cdot\sin(x)$ et $f'(x) = \mathbf{e}^x(\sin(x)+\cos(x))$

(e) $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x+1}{\mathbf{e}^x-1}$ et $f'(x) = \dfrac{2}{(\mathbf{e}^x-1)^2}$

(f) $f(x)=\dfrac{3x+1-\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x}$ et $f'(x)=\dfrac{3-(3x+1)\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^{2x}}$

(g) $f(x)=x^3\cdot\mathbf{e}^{-x}$ et $f'(x)=x^2\mathbf{e}^{-x}(3-x)$

(h) $f(x)=\dfrac{x^2\mathbf{e}^x}{x+1}$ et $f'(x)=\dfrac{x\mathbf{e}^x(x+2)}{(x+1)^2}$

(i) $f(x)=(\mathbf{e}^x)^2+\dfrac{1}{\mathbf{e}^x}$ et $f'(x)=2\mathbf{e}^{2x}-\mathbf{e}^{-x}$

(j) $f(x)=\mathbf{e}^{4x+1}$ et $f'(x)=4\mathbf{e}^{4x+1}$

(k) $f(x)=\mathbf{e}^{\cos(x)}$ et $f'(x)=-\mathbf{e}^{\cos(x)}\sin(x)$

(l) $f(x)=\mathbf{e}^{5x^3+7x+4}$ et $f'(x)=(15x^2+7)\mathbf{e}^{5x^3+7x+4}$

(m) $f(x)=\dfrac{\mathbf{e}^{2x}-1}{x}$ et $f'(x)=\dfrac{\mathbf{e}^{2x}(2x-1)+1}{x^2}$

7 Compléter chacune des affirmations suivantes par l'une des trois propositions fournies (une seule bonne réponse par question).

(a) Soients a et b deux nombres réels tels que $0<a<b$, alors :

☐ $\dfrac{1}{\mathbf{e}^{a^2}}<\dfrac{1}{\mathbf{e}^{b^2}}$ ■ $\mathbf{e}^{-\frac{1}{a}}<\mathbf{e}^{-\frac{1}{b}}$ ☐ $-\mathbf{e}^a<-\mathbf{e}^b$

(b) Soients a et b deux nombres réels, $\dfrac{\mathbf{e}^{3a}\times\mathbf{e}^{-5b}}{(\mathbf{e}^{a-b})^2}$ est égal à :

☐ $\dfrac{\mathbf{e}^{\frac{3}{2}a}}{\mathbf{e}^{\frac{5}{2}b}}$ ☐ $-(\mathbf{e}^a+\mathbf{e}^{-3b})$ ■ $\dfrac{1}{\mathbf{e}^{3b}\times\mathbf{e}^{-a}}$

(c) La limite quand x tend vers $-\infty$ de la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x\mathbf{e}^x}$ est :

☐ 0 ■ $-\infty$ ☐ $+\infty$

(d) La dérivée de la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x}\mathbf{e}^{-3x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est :

■ $-\mathbf{e}^{-3x^2}\left(\dfrac{6x^2+1}{x^2}\right)$ ☐ $6\mathbf{e}^{-3x^2}$ ☐ $-\dfrac{1}{x}\mathbf{e}^{-3x^2}$

(e) La fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $x\longmapsto\dfrac{-2\mathbf{e}^x}{3x+1}$ est :

☐ strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

☐ strictement croissante sur $[0;+\infty[$

■ **strictement croissante sur** $\left[0;\dfrac{2}{3}\right[$ **et strictement décroissante sur** $\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$

(f) La fonction $h:x\longmapsto-\dfrac{3}{2}\mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}$ est solution de l'équation différentielle

■ $y'+\dfrac{1}{2}y=0$ ☐ $y'=-\dfrac{3}{2}y$ ☐ $y'=y$

8 Vrai ou faux ? Justifier.

(a) **V** $\dfrac{\mathbf{e}^5\mathbf{e}^{-3}}{(\mathbf{e}^{4-1})^2}=\mathbf{e}^{-4}$

(b) **F** Pour tout réel x, $\dfrac{\mathbf{e}^{3x}\mathbf{e}^{2x^2}}{(3\mathbf{e}^x)^2}=\dfrac{\mathbf{e}^{5x}}{9}$

(c) **F** Pour tout réel x, $(2\mathbf{e}^x-\mathbf{e}^{-x})^2-(\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x})^2=3\mathbf{e}^{2x}-2$

(d) **V** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\mathbf{e}^{2x}+\mathbf{e}^x+1}{\mathbf{e}^{2x}+1}$ est paire

(e) **F** Soients a et b deux réels tels que $a<b$, alors $\sqrt{\dfrac{1}{\mathbf{e}^{-a}}}>\sqrt{\dfrac{1}{\mathbf{e}^{-b}}}$

(f) **V** Soit a un nombre réel tel que $1 < a$ et n un entier naturel, alors $(\mathbf{e}^a)^n \geq \dfrac{1}{\mathbf{e}^{-n}}$

(g) **F** L'unique solution de l'équation $\mathbf{e}^{2x} - (\mathbf{e}+1)\mathbf{e}^x + \mathbf{e} = 0$ est 0

(h) **V** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathbf{e}^x - x} = 0$

(i) **F** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x\mathbf{e}^{-x} - x} = -\infty$

(j) **F** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathbf{e}^{2x}-1}{2x} = 0$

(k) **V** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\mathbf{e}^{\frac{1}{x^2}} - 1\right) \times x^2 = 1$

(l) **V** f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \mathbf{e}^{2x^2} + \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$, alors $f'(x) = 4x\mathbf{e}^{2x^2} - \dfrac{1}{x^2}\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$

(m) **F** g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{\mathbf{e}^x+2}$, alors $g'(x) = \dfrac{-\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+2}$

9 QCM Choix multiples, réponses multiples

note : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$: $y = \mathbf{e}^x \iff x = \ln(y)$

- ■ **$\mathbf{e}^x = 7$ a pour unique solution $x = \ln 7$**
- ■ **$\mathbf{e}^{2x} + 1 < 0$ n'a pas de solution.**
- ■ **$\mathbf{e}^{-x+2} = \mathbf{e}^{2x-1}$ a pour unique solution $x = 1$**
- □ $\mathbf{e}^{2x} - 5\mathbf{e}^x + 6 = 0$ a pour ensemble solution $S = \{0; \ln 6\}$
- ■ **$\mathbf{e}^{x+1} \geq \frac{2}{\mathbf{e}^x}$ a pour ensemble solution $S = \left[\frac{-1+\ln 2}{2}; +\infty\right[$**

10 QCM Choix multiples, réponses multiples

- ■ $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{1-x} = 0$
- ■ $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\cdot\mathbf{e}^{-x} = 0$
- ☐ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\mathbf{e}^{2x}-1}{3x} = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^{x}-3}{\mathbf{e}^{2x}+1} = 1$
- ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathbf{e}^{-x}+x) = 0$

11 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cdot\mathbf{e}^{2x}-1$

- ☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x+1)\mathbf{e}^{2x}$
- ■ **f est croissante sur** $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$
- ■ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- ☐ l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

12 QCM Choix multiples, réponses multiples

- ☐ $f: x \mapsto x\cdot\mathbf{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \mathbf{e}^x$.
- ■ $f: x \mapsto \mathbf{e}^{x^2+1}$ **définie sur** $\mathbb{R}$ **est dérivable sur cet intervalle et** $f'(x) = 2x\cdot\mathbf{e}^{2x}$
- ■ $f: x \mapsto \frac{\mathbf{e}^x+1}{\mathbf{e}^x-1}$ **définie dans** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **est dérivable sur les intervalles** $]-\infty;0[$ **et** $]0;+\infty[$ **et** $f'(x) = \frac{-2\mathbf{e}^x}{(\mathbf{e}^x-1)^2}$
- ☐ $f: x \mapsto \sqrt{1+\mathbf{e}^{2x}}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\mathbf{e}^{2x}}}$

13 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ est-elle paire, impaire ou quelconque ? Justifie.

Solution:
$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x}+1}{\mathrm{e}^{-2x}+1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x}+1}{\mathrm{e}^{-2x}+1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2x+2x}+\mathrm{e}^{-x+2x}+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{-2x+2x}+\mathrm{e}^{2x}} \\ &= \frac{1+\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

La fonction est donc **paire** (et son graphe admet l'axe des **ordonnées** comme axe de symétrie orthogonale).

14 Soit $f(x) = \mathbf{e}^{2x}-3\mathbf{e}^x+x+2$. Détermine l'équation cartésienne de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

Solution: $f'(x) = 2\mathbf{e}^{2x}-3\mathbf{e}^x+1$; $f'(-1) = 2\mathbf{e}^{-2}-3\mathbf{e}^{-1}+1$; $f(-1) = \mathbf{e}^{-2}-3\mathbf{e}^{-1}+1$

$$\mathbf{T} \equiv y = \left(2\mathbf{e}^{-2}-3\mathbf{e}^{-1}+1\right)x+3\mathbf{e}^{-2}-6\mathbf{e}^{-1}+2$$

15 Rechercher l'équation cartésienne de la tangente au graphe de la fonction

(a) $f(x) = \mathbf{e}^{x^2}$ au point d'abscisse -1

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{\mathbf{e}^x}$ au point d'abscisse 3.

Solution: Voir cours

16 Etudier les variations de la fonction $f(x) = x^2 \cdot \mathbf{e}^x$. En déduire **la position** d'extremums éventuels. Vérifier finalement par calcul la présence d'une asymptote horizontale à gauche et donner son équation.

Solution: laissé au lecteur

17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbf{e}^x - x$

(a) Étudier les variations de f.

(b) En déduire que, pour tout réel x, $\mathbf{e}^x > x$

Solution: Voir cours

18 Déterminer le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \cdot \mathbf{e}^x$. En déduire **la position** d'extremums éventuels.

Solution: Voir cours

19 Étudier la concavité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x^2 \cdot \exp(-2x)$ puis rechercher l'équation cartésienne de la tangente aux points d'inflexions éventuelles.

Solution:

$f'(x) = \left(x^2\mathbf{e}^{-2x}\right)' = 2\mathbf{e}^{-2x}x - 2\mathbf{e}^{-2x}x^2 = \left(2x - 2x^2\right)\mathbf{e}^{-2x}$

$f''(x) = \left(x^2\mathbf{e}^{-2x}\right)'' = \left((2x-2x^2)\mathbf{e}^{-2x}\right)' = \left(2 - 8x + 4x^2\right)\mathbf{e}^{-2x}$

$f''(x) = 0 \iff x = \frac{2+\sqrt{2}}{2},\ x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

x		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	I_1	$\cap$	I_2	$\cup$

Tangente à G_f en I_1 : $y = \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{e}^{\sqrt{2}-2}x + \dfrac{7\mathbf{e}^{-2+\sqrt{2}} - 5\sqrt{2}\mathbf{e}^{-2+\sqrt{2}}}{2}$

Tangente à G_f en I_2 : $y = -\left(1+\sqrt{2}\right)\mathbf{e}^{-2-\sqrt{2}}x + \dfrac{7\mathbf{e}^{-2-\sqrt{2}} + 5\sqrt{2}\mathbf{e}^{-2-\sqrt{2}}}{2}$

20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \dfrac{x^2+x}{\mathbf{e}^x}$

Vérifie que $f''(x) = \dfrac{x^2-3x}{\mathbf{e}^x}$ puis rechercher l'équation cartésienne des tangentes aux points d'inflexion.

Solution: laissé au lecteur

21 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{\mathbf{e}^x - 1}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

a) Déterminer la limite de f quand x tend vers 0, x réel positif.
En déduire que $\mathscr{C}$ possède une asymptote dont on précisera l'équation.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Montrer que la droite D d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D.

c) Étudier les variations de f. Rechercher les coordonnées des points extrémums locaux éventuels.

Solution: laissé au lecteur

22 Étudier la parité et la concavité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto -2x \cdot \exp\left(-x^2\right)$ puis rechercher l'équation cartésienne de la tangente aux points d'inflexions éventuelles.

Solution: $f(-x) = -2(-x) \cdot \exp\left(-(-x)^2\right) = 2x \cdot \exp\left(-x^2\right) = -f(x) \implies$ fonction impaire, son graphe admet l'origine des axes pour axe de symétrie centrale.

$$f''(x) = \left(-2\left(\mathbf{e}^{-x^2} - 2\mathbf{e}^{-x^2}x^2\right)\right)' = -2\left(-6\mathbf{e}^{-x^2}x + 4\mathbf{e}^{-x^2}x^3\right)$$

d'où $f''(x) = -2 \cdot \mathbf{e}^{-x^2}\left(-6x + 4x^3\right) = -2 \cdot x \cdot \mathbf{e}^{-x^2}\left(-6 + 4x^2\right) = 4 \cdot x \cdot \mathbf{e}^{-x^2}\left(3 - 2x^2\right)$

$f''(x) = 0 \iff x = 0,\ x = -\sqrt{\frac{3}{2}},\ x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

le tableau des signes de f'' est laissé au lecteur.

Tangente en $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\qquad T_1 \equiv y = \frac{4}{\mathbf{e}^{\frac{3}{2}}}x + \sqrt{\frac{6}{\mathbf{e}^3}} + \frac{2\sqrt{6}}{\mathbf{e}^{\frac{3}{2}}}$

Tangente en $x = 0$ $\qquad T_2 \equiv y = -2x$

Tangente en $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ $\qquad T_3 \equiv y = \frac{4}{\mathbf{e}^{\frac{3}{2}}}x - \sqrt{\frac{6}{\mathbf{e}^3}} - \frac{2\sqrt{6}}{\mathbf{e}^{\frac{3}{2}}}$

23 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot \mathbf{e}^x$

(a) Montrer que cette fonction possède deux points d'inflexion. Je dois voir un tableau de signes.

Solution: $f'(x) = 2x\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^x\left(x^2 + 1\right) = (x+1)^2\mathbf{e}^x$

$f''(x) = \left((x+1)^2\mathbf{e}^x\right)' = \left(3 + 4x + x^2\right)\mathbf{e}^x$

$3 + 4x + x^2 = 0 \iff x = -3,\ x = -1$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\smile$	I_1	$\frown$	I_2	$\smile$	

(b) Recherche l'équation cartésienne de la tangente à G_f au point d'abscisse -3.

Solution:

Tangente au point $\left(-3; \frac{10}{\mathbf{e}^3}\right)$ et de pente $m = \frac{4}{\mathbf{e}^3}$

$$T \equiv y - \frac{10}{\mathbf{e}^3} = \frac{4}{\mathbf{e}^3}(x+3) \qquad \text{rem : } \frac{10}{\mathbf{e}^3} \approx 0{,}498 \text{ et } \frac{4}{\mathbf{e}^3} \approx 0{,}199$$

ou bien $T \equiv y = \frac{4}{e^3}x + \frac{22}{e^3}$ $\qquad$ rem : $\frac{22}{e^3} \approx 1{,}095$

24 Soit f la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 2 + (2 - x)\,\mathbf{e}^{2x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère cartésien.

(a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution: Voir cours

(b) i. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra poser $X = 2x$).

Solution: Voir cours

ii. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

Solution: Voir cours

iii. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ.

Solution: Voir cours

(c) i. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (3-2x)\,\mathbf{e}^{2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

Solution: Voir cours

ii. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Solution: Voir cours

(d) i. Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{V}$ au point d'abscisse 0.

Solution: Voir cours

ii. Tracer Δ, T, puis $\mathscr{C}$.

Solution: Voir cours

25 Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = (x+1)\cdot\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}$$

(a) Déterminez le domaine de définition et étudiez l'existence de point creux ou d'asymptotes (AV, AH, AO).

Solution: **dom** $f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

a) point creux / AV : $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

G. $\lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)\cdot\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} = 0\cdot\mathbf{e}^{\frac{1}{0^-}} = 0\cdot\mathbf{e}^{-\infty} = 0$

Point creux à gauche en $(-1,0)$.

D.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^+}(x+1)\cdot\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} &= 0\cdot(+\infty)\\ &= \lim_{x\to-1^+}\frac{\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}}{\frac{1}{x+1}}\\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to-1^+}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}\\ &= \lim_{x\to-1^+}\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} = +\infty\end{aligned}$$

$\text{AV}_d \equiv x = -1$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = (\pm\infty)\cdot 1 = \pm\infty$ pas d'AH à gauche/à droite

c) Existe-t-il une AO à gauche? à droite?

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{\frac{1}{x+1}}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x &= \lim_{x\to\pm\infty}(x+1)\cdot\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}(x+1)\cdot\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} - \lim_{x\to\pm\infty} x = -\infty+(+\infty) \quad \text{(FI)}\\ &= \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\left(\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}-1\right)}_{\pm\infty\times 0} + \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}}_{\to 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x &= \left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}-1}{\frac{1}{x}}\right)+1\\ &\overset{H}{=} \left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}\right)+1\\ &= \left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2}\cdot\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}\right)+1 = 1+1 = 2 \qquad \text{d'où } AO \equiv y = x+2\end{aligned}$$

(b) Déterminez la dérivée de f et dressez le tableau de variation.

Solution: $f'(x) = (x+1)'\,\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} + \left(\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}\right)'(x+1) = \ldots = \frac{x}{x+1}\cdot\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\mathbf{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de la fonction admet un minimum en $(0\,;\,\mathbf{e})$

26 $(\star)$ En utilisant l'égalité $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e}$, déterminez le réel α pour que

$$L = \lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{3}{x}} + \alpha\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} = 0$$

Solution: $\lim\limits_{x\to0^+}(1+2x)^{\frac{3}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$

$$\overset{x\leftarrow 2t}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{6t}$$

$$= \left(\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{6}$$

$$= \mathbf{e}^6$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2x}$$

$$= \mathbf{e}^{-2}$$

$$L = 0 \iff \mathbf{e}^6 + \alpha\cdot\mathbf{e}^{-2} = 0 \iff \alpha = -\mathbf{e}^8$$

27 $(\star)$ Soit $f_m(x) = x + m\cdot\mathbf{e}^{-x}$ (avec m paramètre réel non nul) et soit C_{f_m} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(a) Déterminer le domaine de définition de f_m et étudier le comportement asymptotique de f_m.

Solution:

(b) Calculer la dérivée première de f_m et ses racines éventuelles. Discuter, en fonction de m, les variations de f_m

Solution:

(c) Montrer qu'à chaque courbe C_{f_m}, on peut tracer une tangente t_m passant par l'origine du repère. Déterminer les coordonnées du point de contact ainsi qu'une équation de t_m.

Solution: