Objectif de la séquence :

- calculer une aire délimitée par une courbe définie par une fonction de signe variable, l'axe des abscisses et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équations $x = a$ et $x = b$;
- calculer une aire délimitée par deux courbes différentes.

Vocabulaire : La quadrature d'une surface limitée par des courbes ou des droites est le calcul de son aire.

1. Pour calculer l'aire A d'une partie du plan limitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe x et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, lorsque f est intégrable sur $[a, b]$:

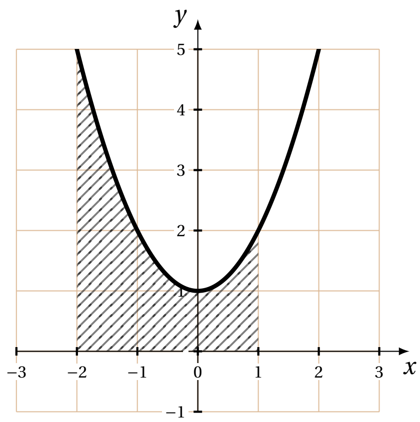
   (a) si f est positive sur $[a, b]$, alors $A = \int_a^b f(x)\, dx$;

   Exemple : on désire calculer l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

   La fonction f étant clairement strictement positive sur $[-2\,;1]$, il suffit de calculer :

   $$A = \int_{-2}^{1} \left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-2}^{1}$$
   $$= \left(\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 1\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 + (-2)\right)\right)$$
   $$= 6 \text{ u.a.}$$

   u.a. = unité d'aire

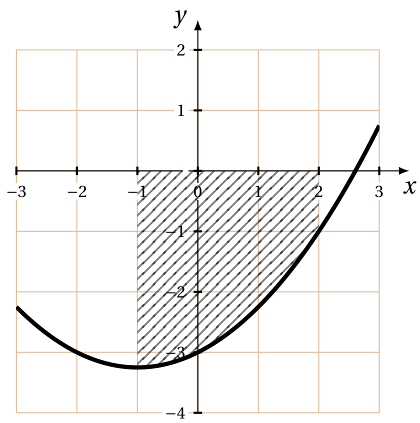
   (b) si f est négative sur $[a, b]$, alors $A = -\int_a^b f(x)\, dx$;

   Exemple : on désire calculer l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+2x-12}{4}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

   La fonction f étant strictement négative sur $[-1\,;2]$, il suffit de calculer :

   $$A = -\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 12x\right)\Big|_{-1}^{2}$$
   $$= \frac{15}{2} \text{ u.a.}$$

   Remarque : $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{15}{2}$

   Attention : pour affirmer que la fonction est négative sur l'intervalle $[-1\,;2]$, on doit d'abord veiller à établir son tableau de signes! *(à contrario de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ dont le signe ne faisait aucun doute)*

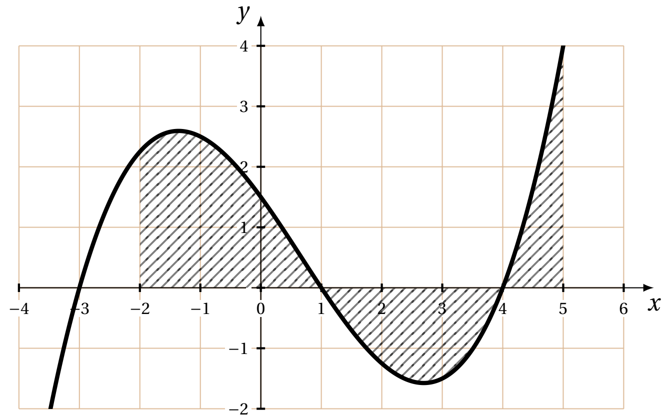
   Tableau de signes du trinôme du second degré $x^2 + 2x - 12$:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{13}$		$-1+\sqrt{13}$		$+\infty$
$x^2+2x-12$		+	0	−	0	+	

   f est donc bien négative sur $[-1\,;2]$ puisque $[-1\,;2] \subset \left[-1-\sqrt{13} \approx -4{,}6\,; -1+\sqrt{13} \approx 2{,}6\right]$

(c) sinon on partage l'intervalle $[a,b]$ en sous-intervalles sur lesquels f est soit positive, soit négative et on additionne toutes les intégrales positives à qui on ajoute l'opposé de toutes les intégrales négatives.

Exemple : on désire calculer l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{8}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 5$.



A partir du graphe de f, on établit que

$$A = \int_{-2}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x - \int_{1}^{4} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{4}^{5} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Généralement, on ne dispose pas du graphe de la fonction. C'est pour cette raison qu'il faut absolument construire le tableau de signe de celle-ci avant d'établir l'addition ou la soustraction des différentes intégrales définies permettant d'obtenir le résultat escompté.

Dans l'exemple précédent, l'expression analytique de la fonction est définie par le produit de trois facteurs du premier degré dont il est facile d'extraire les racines. Il sera d'autant plus facile de construire son tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-4$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
f		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f étant positive sur $]-3;1[$ et $]4;+\infty[$, elle l'est également sur $]-2;1[$ et $]4;5[$. Elle est, par ailleurs, négative sur $]1;4[$, ce qui implique le signe «moins» devant l'intégrale définie $\int_1^4 f(x)\ \mathrm{d}x$.

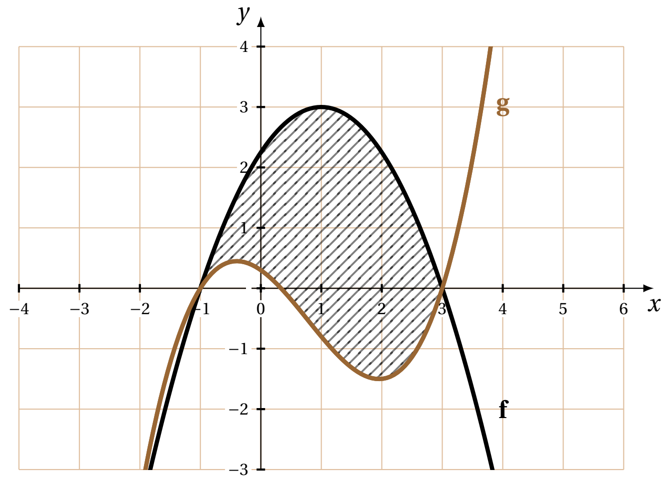
Le calcul de chacune des trois intégrales définies est laissé au soin du lecteur.

Note : pour calculer ces intégrales définies, il faut d'abord développer le produit des trois facteurs constitutifs de l'expression analytique de f, puis procéder à la recherche de la primitive du polynôme du troisième degré ainsi obtenu.

Pour information : $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{(x+3)\,(x-1)\,(x-4)}{8} dx = \frac{171}{32}$; $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{(x+3)\,(x-1)\,(x-4)}{8} dx = -\frac{99}{32}$

et $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{(x+3)\,(x-1)\,(x-4)}{8} dx = \frac{169}{96}$ d'où $A = \dfrac{979}{96}$

2. Pour calculer l'aire A d'une partie du plan non bordée par l'axe x, mais bordée par les graphes G_f et G_g de deux fonctions f et g intégrables sur $[a,b]$ ($x=a$ et $x=b$ étant les abscisses des intersections des deux graphes), si le graphe de f est au-dessus de celui de g, on calcule : $A=\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x$

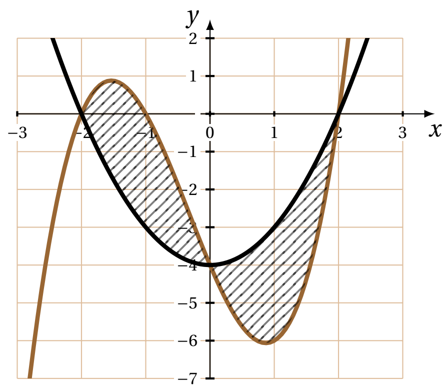


Exemple : Soient $f : x \mapsto x^2-4$ et $g : x \mapsto (x+2)(x-2)(x+1)$ définies sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'aire, en u.a., du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sur l'intervalle $[-2;2]$.

(a) On calcule la différence $f(x)-g(x)=x^2-4-(x+2)(x-2)(x+1)$ et en factorisant, on a : $f(x)-g(x)=(x^2-4)(1-x-1)=-x(x^2-4)$.

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	-2		0		2
x^2-4	0	$-$		$-$	0
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	0	$-$	0	$+$	0



On décompose donc l'intervalle $I=[-2;2]$ en deux sous-intervalles $I_1=[-2;0]$ et $I_2=[0;2]$ sur lesquels on intègre respectivement $g-f$ et $f-g$.

(b) Ainsi, Aire $=\displaystyle\int_{-2}^{0} x(x^2-4)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 -x(x^2-4)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2}$.

D'une part, $\displaystyle\left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0}=\frac{(-4)^2}{4}-\frac{0^2}{4}=4$.

D'autre part, $\displaystyle\left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2}=\frac{0^2}{4}-\frac{(-4)^2}{4}=-4$.

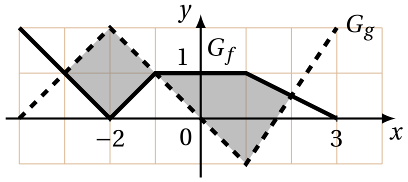
Ainsi, Aire $=8$ u.a.

Méthode pour calculer l'aire entre deux courbes :

1. Commencer par étudier sur I les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ puis décomposer l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels $f-g$ garde un signe constant.
2. Sur chaque sous intervalle, calculer, selon les cas, l'intégrale de $f-g$ ou de $g-f$.

Exercices

1 Décris l'aire située entre les deux courbes G_f et G_g par une expression mathématique faisant intervenir la notion d'intégrale définie. Aucun calcul n'est nécessaire.

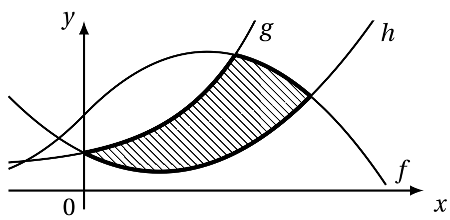


SOLUTION :

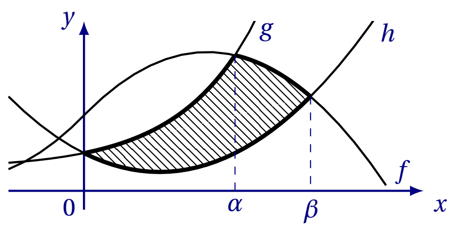
$$\text{aire} = \int_{-3}^{-1} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

2 Écrire l'aire de la région du plan hachuré sous forme d'intégrales sachant que

$$f(\alpha) = g(\alpha) \text{ et } f(\beta) = h(\beta) \quad (\text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tels que } \alpha < \beta)$$



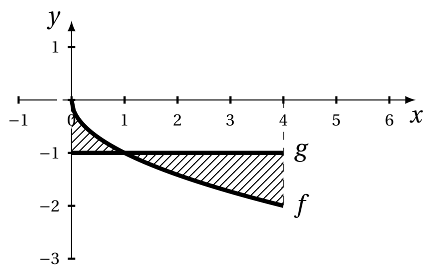
SOLUTION :



$$\text{aire} = \int_{0}^{\alpha} g(x) - h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) - h(x)\,\mathrm{d}x$$

3 Calculez l'aire de la région du plan hachurée ci-dessous. On reconnaitra le graphe des fonctions

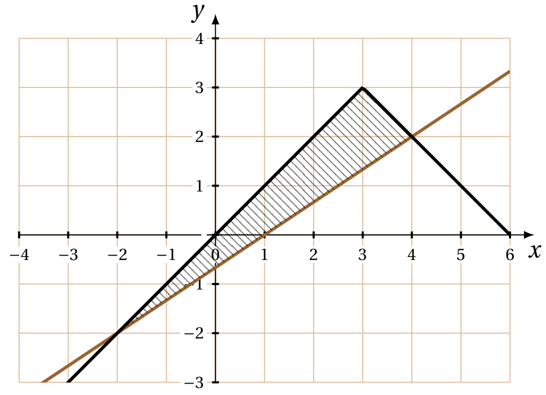
$$f : x \longmapsto -\sqrt{x} \text{ et } g : x \longmapsto -1.$$



SOLUTION :

$$\begin{aligned}
\text{aire} &= \int_{0}^{1} -\sqrt{x} - (-1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} -1 - \left(-\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right)\Bigg|_1^4 \\
&= \left(-\frac{2}{3} + 1\right) + \left[\left(\frac{2}{3}8 - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{3} + \left[\left(\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = 2 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

4 Calculer l'aire de la région décrite via son graphique :



SOLUTION : $f(x) = x$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ et $h(x) = 6 - x$ sont les équations des trois droites dessinées dans le RON (Repère OrthoNormé)

$$\begin{aligned}
\text{aire} &= \int_{-2}^{3} f(x) - g(x)\, dx + \int_{3}^{4} h(x) - g(x)\, dx \\
&= \int_{-2}^{3} x - \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right) dx + \int_{3}^{4} 6 - x - \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right) dx \\
&= \int_{-2}^{3} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\, dx + \int_{3}^{4} -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}\, dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{-2}^{3} x + 2\, dx - \frac{5}{3}\int_{3}^{4} x - 4\, dx \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{3} - \frac{5}{3}\left(\frac{x^2}{2} - 4x\right)\Big|_{3}^{4} \\
&= 5 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

5 Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe d'équation $y = x^2 - 2x - 3$ et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$.

SOLUTION : étude du signe de f sur $[-2;1]$: $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$

x		-1		3	
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

Par conséquent, sur l'intervalle $[-2;1]$, l'aire sera calculée par :

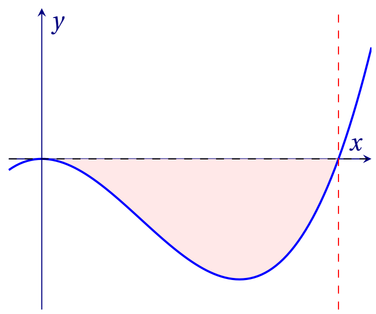
$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \int_{-2}^{-1} f(x)\, dx - \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \\
&= \int_{-2}^{-1} x^2 - 2x - 3\, dx - \int_{-1}^{1} x^2 - 2x - 3\, dx \\
&= \frac{7}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{23}{3}
\end{aligned}$$

6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3}$. Rechercher l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 9$.

SOLUTION : $\dfrac{x^3}{27} - \dfrac{x^2}{3} = \dfrac{x^2(x-9)}{9}$

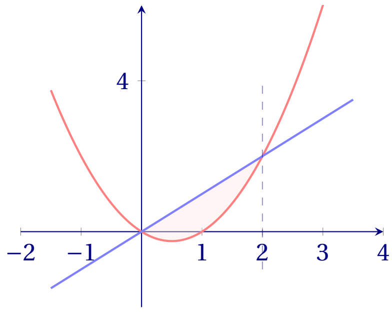
x		0		9	
$x^2(x-9)$	$-$	0	$-$	0	$+$

aire$= -\displaystyle\int_{0}^{9} f(x)\, dx = \frac{81}{4}$



7 Calculer l'aire comprise entre les courbes $G_f \equiv y = x(x-1)$ et $G_g \equiv y = x$ par calcul intégral.

SOLUTION : aire$=\displaystyle\int_0^2 x - x(x-1)\;\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$



8 Calculer l'aire de la région située entre la fonction $f(x) = x^2+3x+3$ et la fonction $g(x) = 2x+9$ sur l'intervalle $[-3;3]$.

SOLUTION : On étudie le signe de $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, sur l'intervalle $[-3;3]$, l'aire sera calculée par :

$$\mathbf{A} = \int_{-3}^{2} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{A} = \int_{-3}^{2} -x^2 - x + 6\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} x^2 + x - 6\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{125}{6} + \frac{17}{6} = \frac{71}{3}$$

9 Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par le graphe des deux fonctions

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 \text{ et } g(x) = x^2 - 4x + 3$$

SOLUTION : Trouver les points d'intersection : $-x^2+6x-5 = x^2-4x+3 \iff x = 1\,;\ x = 4$
Etude du signe de $f-g$: $f(x) - g(x) = -2x^2 + 10x - 8$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f est toujours au-dessus de g sur l'intervalle $[1;4]$

L'aire recherchée est donnée par $\displaystyle\int_1^4 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^4 -2x^2 + 10x - 8\,\mathrm{d}x = 9$ u.a.

10 Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation $y = x^4 - 2x^3 + 1$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

SOLUTION :

1. Trouver l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
rappel : $T \equiv y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1 \implies f(0) = 1$$
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 \implies f'(0) = 0$$

L'équation de la tangente est $y = 1$

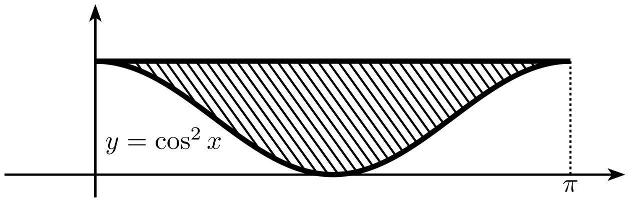
2. Trouver les points d'intersection entre la courbe et la tangente.

Il suffit de résoudre l'équation $x^4 - 2x^3 + 1 = 1 \iff x = 0\ ;\ x = 2$

3. Intégrer la différence entre la tangente et la courbe sur l'intervalle défini par les points d'intersection.
(tu dois vérifier que la tangente est au-dessus de la courbe entre 0 et 2 ... réalise un tableau de signe!)

$$\int_0^2 2x^3 - x^4 \, dx = \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{8}{5} \text{ u.a.}$$

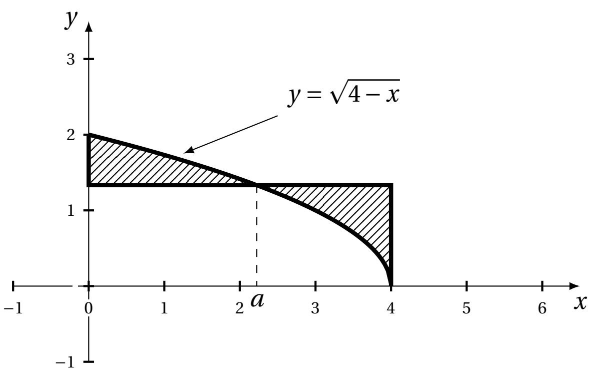
11 Calculer l'aire de la surface hachurée :



SOLUTION : sachant que $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, on a :

$$\int_0^{\pi} 1 - \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

12 Calculez la valeur exacte du réel a pour que les aires des deux régions hachurées soient égales.



SOLUTION : via la moyenne d'une fonction : $f(a) = \frac{1}{4} \int_0^4 \sqrt{4-x} \, dx = \frac{1}{4} \left(-\frac{2\sqrt{(4-x)^3}}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{4}{3}$

Par conséquent , $\sqrt{4 - a} = \frac{4}{3} \iff 4 - a = \frac{16}{9}$

La réponse attendue est $a = \frac{20}{9}$ (approximativement $2,222$)

Remarque : une autre manière d'y arriver est de résoudre :

$$\int_0^a \sqrt{4-x} - \sqrt{4-a} \, dx = \int_a^4 \sqrt{4-a} - \sqrt{4-x} \, dx$$