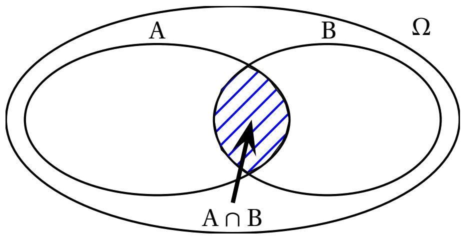
❀ Probabilité ❀

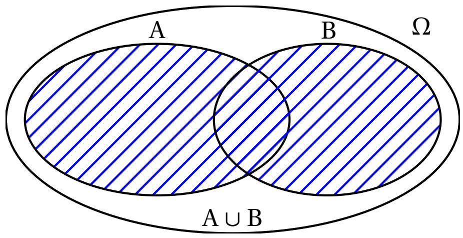
Table des matières

1 Intersection, réunion et événements complémentaires

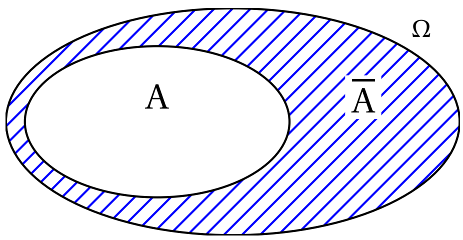
Définition 1 (Intersection)
L'intersection des événements A et B est l'événement noté A ∩ B, formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A <u>et</u> l'événement B, c'est à dire les deux.
A ∩ B se lit " A inter B ".



Définition 2 (Réunion)
La réunion des événements A et B est l'événement noté A ∪ B, formé des issues qui réalisent l'événement A <u>ou</u> l'événement B, c'est à dire au moins l'un des deux.
A ∪ B se lit " A union B ".



Définition 3 (Evénement contraire ou complémentaire)
L' événement contraire de l'événement A est formé des issues qui ne réalisent pas A. On le note $\overline{A}$



1.1 Synthèse ensembliste

Identité	Nom
$A \cap \Omega = A \cup \varnothing = A$	Identités
$A \cup \Omega = \Omega$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dominantes
$A \cup A = A \cap A = A$	Idempotence
$\overline{(\overline{A})} = A$ $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$	Complémentarité
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutativité
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associativité
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivité
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Lois de De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A = A \cap (A \cup B)$	Absorption

2 Probabilités

2.1 Axiomatique de Kolmogorov

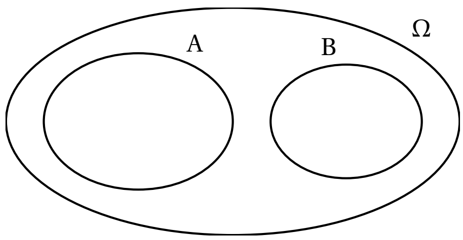
Soit $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire [1], d'univers [2] Ω et A un événement [3]. La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$ et cette application vérifie les propriétés :

- Axiome 1 : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- Axiome 2 : $P(\Omega) = 1$
- Axiome 3 : Si $A \cap B = \emptyset$, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2.2 Calculs des probabilités

- La somme des probabilités élémentaires vaut 1
- La probablité d'un événement est égal à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent
- en cas d'équiprobabilité : $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$

Définition 4
Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.
On a alors $A \cap B = \emptyset$ et $P(A \cap B) = 0$.



Propriété 1
Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

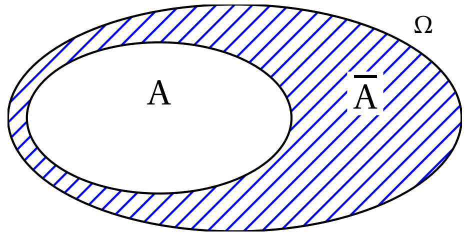
Propriété 2
Dans le cas général : $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$. Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

1. Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat dépend entièrement du hasard et dont les résultats possibles sont connus.
2. L'ensemble de tous les résultats possibles que nous pouvons obtenir au cours d'une expérience aléatoire.
3. Un certain sous-ensemble de l'univers lié à l'expérience.

Définition 5
L' événement contraire de l'événement A est formé des issues qui ne réalisent pas A. On le note $\overline{\text{A}}$

Propriété 3

$$\text{P}(\overline{\text{A}}) = 1 - p(\text{A})$$



2.3 Applications

1. Parmi les appareils fabriqués en très grande série, certains peuvent présenter des défauts. Les défauts de fabrication peuvent être du type A ou B. 10% des appareils présentent le défaut A, 8% le défaut B et 4% les deux défauts simultanément. Quelle est la probabilité qu'un client achète un appareil défectueux?
2. André, Bernard et Charles participent à une course à pied. André et Bernard ont la même probabilité de gagner et celle-ci est double à celle de voir Charles gagner. Quelle est la probabilité que ce soit Bernard ou Charles qui gagnent la course?
3. Lors d'un jet simultané de deux dés, quelle est la probabilité d'obtenir :
   a. Au moins un six?
   b. Huit comme somme des deux points?
   c. Au moins 10 comme somme des deux points?
4. Un sac contient 3 objets rouges, 4 bleus et 5 jaunes. On en tire 3 simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir :

   a. 3 objets jaunes?
   b. Un objet de chaque couleur?
   c. Au moins un objet rouge?
   d. Au plus un objet bleu?

   Solutions commentées du dernier exercice d'application :

   a. Pour obtenir trois objets jaunes, nous devons choisir trois objets jaunes parmi les cinq objets jaunes. Le nombre de façons de le faire est donné par le coefficient binomial $\mathbf{C}_5^3$. Ainsi, le nombre de cas favorables est $\mathbf{C}_5^3 = 10$. Le nombre de cas possibles est $\mathbf{C}_{12}^3$, car nous choisissons trois objets parmi douze. Donc, la probabilité d'obtenir trois objets jaunes est : $\frac{1}{22}$

   b. Pour obtenir un objet de chaque couleur, nous devons choisir un objet rouge parmi les trois objets rouges, un objet bleu parmi les quatre objets bleus et un objet jaune parmi les cinq objets jaunes. Le nombre de façons de le faire est donné par le produit de coefficients binomiaux $\mathbf{C}_3^1\mathbf{C}_4^1\mathbf{C}_5^1$. Ainsi, le nombre de cas favorables est $\mathbf{C}_3^1\mathbf{C}_4^1\mathbf{C}_5^1 = 60$. Le nombre de cas possibles est $\mathbf{C}_{12}^3$, car nous choisissons trois objets parmi douze. Donc, la probabilité d'obtenir un objet de chaque couleur est : $\frac{3}{11}$

   c. Pour calculer la probabilité d'obtenir au moins un objet rouge, nous pouvons utiliser la probabilité complémentaire, c'est-à-dire la probabilité de ne pas obtenir d'objet rouge du tout. La probabilité de ne pas obtenir d'objet rouge lorsqu'on en tire 3 simultanément est donnée par :

   $$P(\text{aucun objet rouge}) = \frac{\mathbf{C}_{4+5}^3}{\mathbf{C}_{3+4+5}^3} = \frac{\mathbf{C}_9^3}{\mathbf{C}_{12}^3} = \frac{84}{220} = \frac{21}{55}$$

   Ainsi, la probabilité d'obtenir au moins un objet rouge est donnée par :

   $$P(\text{au moins un objet rouge}) = 1 - P(\text{aucun objet rouge}) = 1 - \frac{21}{55} = \frac{34}{55}$$

   d. Pour calculer la probabilité d'obtenir au plus un objet bleu, nous devons considérer deux cas : celui où nous n'obtenons aucun objet bleu et celui où nous n'obtenons exactement un objet bleu. La probabilité de ne pas obtenir d'objet bleu lorsqu'on en tire 3 simultanément est donnée par :

   $$P(\text{aucun objet bleu}) = \frac{\mathbf{C}_{3+5}^3}{\mathbf{C}_{3+4+5}^3} = \frac{\mathbf{C}_8^3}{\mathbf{C}_{12}^3} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$

   La probabilité d'obtenir exactement un objet bleu est donnée par :

   $$P(\text{exactement un objet bleu}) = \frac{\mathbf{C}_4^1\mathbf{C}_8^2}{\mathbf{C}_{12}^3} = \frac{96}{220} = \frac{12}{55}$$

   Ainsi, la probabilité d'obtenir au plus un objet bleu est donnée par :

   $$P(\text{au plus un objet bleu}) = P(\text{aucun objet bleu}) + P(\text{exactement un objet bleu}) = \frac{14}{55} + \frac{12}{55} = \frac{26}{55}$$

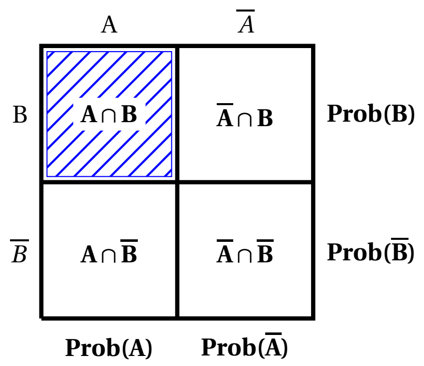
3 Intersection et probabilité conditionnelle

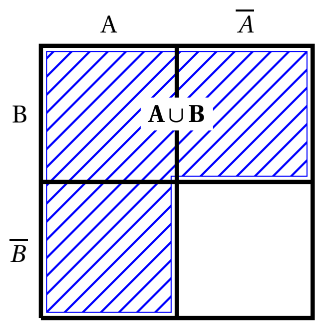
3.1 Exploration

Une enquête réalisée lors d'une assemblée internationale a montré que 60% des participants comprennent l'anglais, 45% l'espagnol et 15% les deux langues.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans l'assemblée comprenne l'espagnol ?
2. Que devient cette probabilité si vous savez déjà qu'elle comprend l'anglais ?

3.2 Diagramme de Caroll





Note : Les diagrammes d'Euler, de Venn et de Carroll sont des schémas géométriques utilisés pour représenter des relations logico-mathématiques. Créés pour visualiser la structure logique des syllogismes, ils sont couramment utilisés pour l'étude des relations entre ensembles.

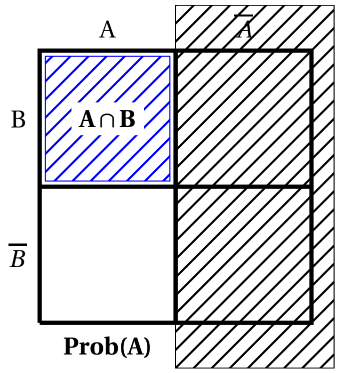
3.3 Probabilité conditionnelle

Si nous savons que l'événement A est réalisé, nous pouvons alors calculer la probabilité de B sachant que A est réalisé en "éliminant" $\overline{\mathbf{A}}$ et en calculant uniquement avec la partie gauche du diagramme de Caroll.

Propriété 4

Probabilité conditionnelle de B sachant A : $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Nous écrirons parfois : $P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$



Les expressions " sachant que... ", " quand... ", " lorsque... ", " parmi... " sont souvent utilisées pour donner une probabilité conditionnelle. En effet, ces expressions annoncent que l'univers change, qu'il n'est qu'une partie de l'univers initial. C'est ce nouvel univers qui exprime le conditionnement et qui sera noté en indice.
Exemple : "Parmi les élèves de 6ème, la probabilité que ce soit une fille vaut $\frac{7}{20}$" correspond à une probabilité conditionnelle.

3.4 Indépendance

Lorsque les événements A et B sont indépendants, cela signifie que la connaissance de la réalisation de l'événement A n'a aucune influence sur la réalisation de l'événement B. Dans ce cas nous avons $P(B \mid A) = P(B)$, d'où nous déduisons :

Propriété 5

A et B sont indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3.4.1 Étude de l'indépendance de deux événements

On compare $P(A \cap B)$ et $P(A) \cdot P(B)$ ou $P(A|B)$ et $P(A)$ ou $P(B|A)$ et $P(B)$. En cas d'égalité, les événements sont indépendants.

3.4.2 A noter

— Dans un certain nombre de cas, l'indépendance est une **donnée du problème**.

1. Si nous jouons à Pair/Impair, à la roulette d'un casino, la chance de gain est de $\frac{1}{2}$. Il est clair que si nous jouons trois fois de suite, chaque jeu est indépendant. Ainsi, la chance de gagner trois fois de suite sera

$$P = P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

De façon général, si nous jouons de façon répétée à un jeu, chaque partie sera indépendante.

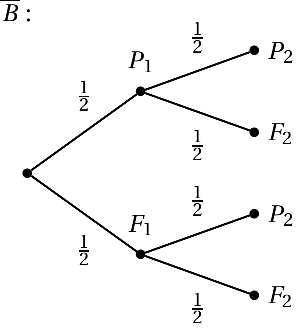
2. On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un avion bi-moteur tombe en panne avec une probabilité de $0,0001$ et ceci de façon indépendant de l'autre moteur. On voudrait déterminer la probabilité que l'avion arrive à bon port (en supposant en plus qu'il peut voler avec un seul moteur). Pour cela on peut considérer les événements : M_1 : « Le premier moteur tombe en panne »puis M_2 : « Le deuxième moteur tombe en panne ». On sait par hypothèse que ces événements sont indépendants, donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 10^{-4} \times 10^{-4} = 10^{-8}$$

La probabilité demandée est donc la probabilité de l'événement $\overline{A \cap B}$:

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - 10^{-8} = 0,999\,999\,99$$

— On peut remarquer qu'il est possible de construire un arbre pondéré sur la base d'événements indépendants. Si nous lançons par exemple deux pièces de monnaie, nous pouvons dresser l'arbre pondéré suivant :



3.5 Applications

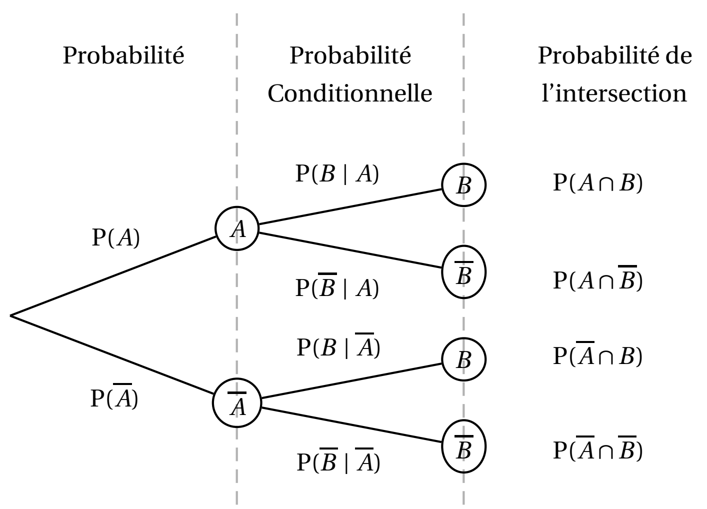
1. Deux étudiants cherchent la solution d'un problème sans se consulter. Le premier a une probabilité de 0,8 et le second de 0,3 de trouver la solution. Quelle est la probabilité que le problème ne soit pas résolu?
2. Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie.

	Tennis	Equitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

   a. Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants?

   b. Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants?

4 Arbre de probabilité



4.1 Règles de l'arbre pondéré

— la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud vaut 1 : $P(A|B)+P\left(\overline{A}|B\right)=1$;

— la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des différentes branches qui constituent ce chemin :

$$P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)$$

Cette formule permet de calculer la probabilité de l'événement $A\cap B$ connaissant $P(A|B)$ et $P(B)$

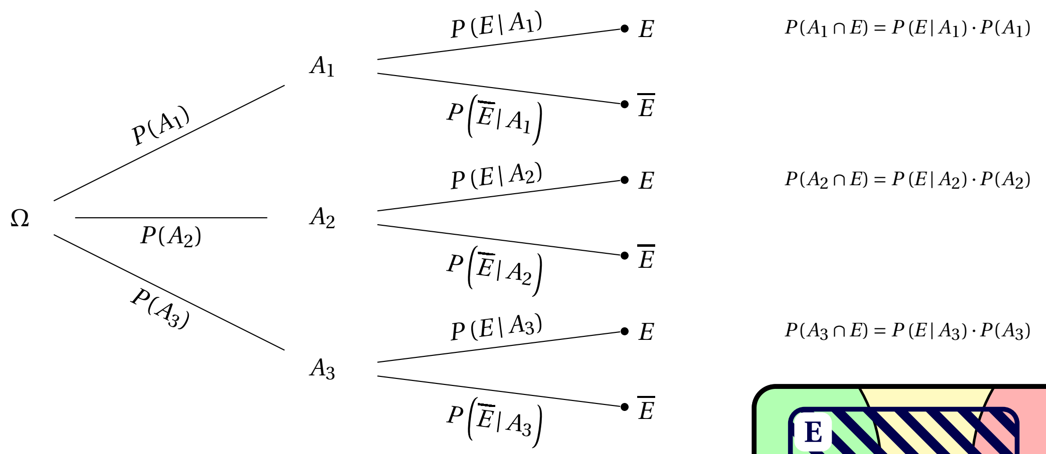
5 Théorème de Bayes

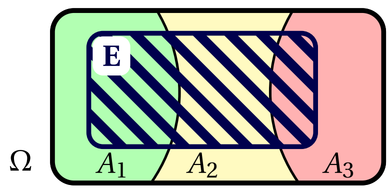
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A)+P\left(B|\overline{A}\right)\cdot P(\overline{A})}$$

6 Formule des probabilités totales

— Il faut reconnaître un système complet d'événements : A_1, A_2, A_3

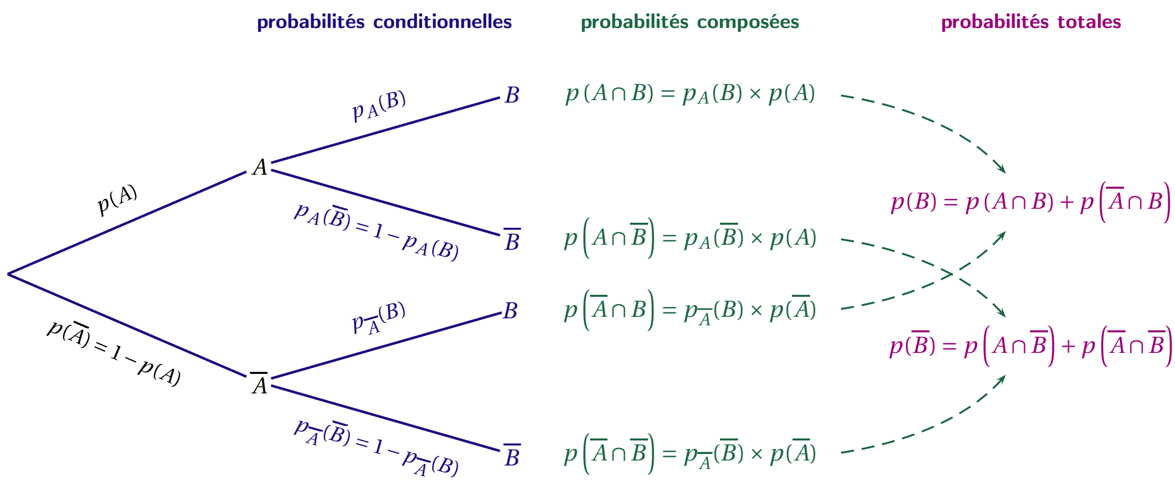
— On utilise un arbre pondéré pour exploiter les hypothèses





$$\begin{aligned}P(E)&=P(A_1\cap E)+P(A_2\cap E)+P(A_3\cap E)\\&=P(E|A_1)\cdot P(A_1)+P(E|A_2)\cdot P(A_2)+P(E|A_2)\cdot P(A_2)\end{aligned}$$

7 Complément graphique



8 Exercices

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

1 Un pépiniériste conditionne un mélange de 400 bulbes de fleurs composé de trois variétés :

- 100 bulbes d'Anémones
- 180 bulbes de Bégonias
- 120 bulbes de Crocus.

On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit.
Après avoir planté tous les bulbes et observé leur floraison, on constate que :

83 % des bulbes germent.
50 % des bulbes d'Anémones germent.
90 % des bulbes de Bégonias germent.

On note les évènements suivants :

— A : « le bulbe planté est un bulbe d'Anémone. »
— B : « le bulbe planté est un bulbe de Bégonias. »
— C : « le bulbe planté est un bulbe de Crocus. »
— G : « le bulbe planté germe. »

(a) Donner les probabilités conditionnelles $P(G \mid A)$, $P(G \mid B)$ et la probabilité P(G) .

(b) Quelle est la probabilité qu'un bulbe planté soit un bulbe d'Anémone qui germe ?

(c) Quelle est la probabilité que le bulbe planté soit un bulbe qui germe ou soit un bulbe de Bégonias ?

(d) i. Calculer la probabilité conditionnelle $P(G \mid C)$.

ii. Que peut-on en déduire ?

(e) On considère un bulbe ayant germé. Quelle est la probabilité que ce soit un bulbe de Crocus ?

Solution: Les données de l'énoncé permettent d'établir le tableau suivant :

	A : Anémones	B : Bégonias	C : Crocus	
G : germent	50	162	120	332
$\overline{G}$: ne germent pas	50	18	0	68
Total	100	180	120	400

(a) l'énoncé indique : $P(G \mid A) = 0,5 \quad P(G \mid B) = 0,9 \quad P(G) = 0,83$

(b) On cherche $P(A \cap G)$. Par la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(A \cap G) = P(G \mid A)P(A) = 0,5 \times \frac{100}{400} = \frac{1}{8}$$

La probabilité qu'un bulbe planté soit un bulbe d'anémone *qui germe* est $0,125$.

(c) probabilité que le bulbe planté soit un bulbe qui germe ou soit un bulbe de Bégonias

$$P(G \cup B) = P(G) + P(B) - P(G \cap B)$$

Or le mélange de 400 bulbes contient 180 bulbes de Bégonias d'où $\mathrm{P(B)} = \frac{180}{400} = 0,45$
et $P(G \cap B) = P(G \mid B) \times P(B) = 0,9 \times 0,45 = 0,405$
d'où

$$\mathrm{P(G \cup B)} = 0,83 + 0,45 - 0,405 = 0,875$$

(d) i. On cherche $P(G \mid C)$.

$$P(G \mid C) = \frac{P(C \cap G)}{P(C)} = \frac{120/400}{120/400} = \frac{0,3}{0,3} = 1$$

ii. Tous les bulbes de Crocus ont germé.

(e) On cherche $P(C \mid G)$.

$$P(C \mid G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)} = \frac{0,3}{0,83} \approx 0,361$$

2 Une urne contient 5 boules rouges, 6 bleues et 8 vertes. Si 3 boules sont choisies au hasard, quelle est la probabilité que **chaque** boule soit

(a) de la même couleur ;

Solution: Les événements sont incompatibles

$$P(\mathrm{RRR})+P(\mathrm{BBB})+P(\mathrm{VVV})=\frac{C_5^3}{C_{19}^3}+\frac{C_6^3}{C_{19}^3}+\frac{C_8^3}{C_{19}^3}=\frac{86}{969}\approx 0,08875$$

(b) de couleurs différentes ?

Solution: $P(\mathrm{RBV})=\dfrac{\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_8^1}{\mathrm{C}_{19}^3}=\dfrac{240}{969}\approx 0,24768$

3 Un filtre antispam est conçu pour étudier certaines phrases dans les courriels indésirables. Supposons que 80% des emails sont des spams. Dans 10% des spams, la phrase "gagner de l'argent" apparait alors que la phrase est utilisée dans seulement 1% des mails désirables. Un nouveau courriel arrive, qui mentionne la phrase “gagner de l'argent”. Quel est la probabilité que ce soit un spam ? Réponse donnée à 10^{-5} près.

Solution:

- événement G : la phrase "gagner de l'argent" apparait
- événement S : l'email est un spam

80% des emails sont des spams : $P(S)=0,8$

dans 10% des spams, la phrase "gagner de l'argent" apparait : $P(G\mid S)=0,10$ (parmi les spams, 10% contiennent la phrase ...)

la phrase est utilisée dans seulement 1% des mails désirables : $P(G\mid\overline{S})=0,01$

Par la formule de Bayes :

$$P(S\mid G)=\frac{P(S\cap G)}{P(G)}=\frac{P(S)P(G\mid S)}{P\left(\overline{S}\cap G\right)+P(S\cap G)}=\frac{0,8\times 0,10}{0,8\times 0,10+0,01\times 0,2}=0,97561$$

4 Une usine fabrique des ampoules électriques ; 75% sont conformes aux normes et 25% non conformes. Un contrôle, qui n'est pas infaillible, accepte 10% des ampoules non conformes et rejette 4% des ampoules conformes.

(a) Calculer la probabilité qu'une ampoule soit acceptée par le contrôle.

Solution: $P(C)=0,75$; $P\left(A\mid\overline{C}\right)=0,1$; $P\left(\overline{A}\mid C\right)=0,04$.

$$P(A)=P(A\cap C)+P\left(A\cap\overline{C}\right)=P(C)P(A\mid C)+P(C)P\left(A\mid\overline{C}\right)=0,75\times 0,96+0,25\times 0,1=0,745$$

(b) Sachant qu'une ampoule est acceptée, quelle est la probabilité qu'elle soit conforme aux normes ?

Solution: $P(C\mid A)=\dfrac{P(C\cap A)}{P(A)}=\dfrac{0,75\times 0,96}{0,745}=\dfrac{0,72}{0,745}=0,966443$

5 Soit le tableau de probabilités suivant :

	A	$\overline{A}$	
B	13	?	42
$\overline{B}$	?	?	?
	23	?	63

Calculer la probabilité $P\left(\overline{B}\,|\,\overline{A}\right)$. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction.

Solution: $P\left(\overline{B}\,|\,\overline{A}\right)=\dfrac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\dfrac{\#\overline{A}\cap\overline{B}}{\#\overline{A}}=\dfrac{21-10}{40}=\dfrac{11}{40}$

6 Un laboratoire de recherche met au point un test de dépistage d'une maladie chez une espèce animale et fournit les renseignements suivants : " la population testée comporte 26% d'animaux malades ".

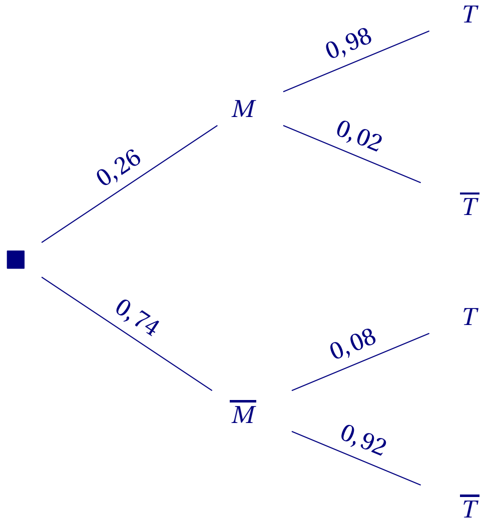
Si un animal est malade, le test est positif dans 98% des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 92% des cas ".

On note M l'événement " l'animal est malade ", et T l'événement " le test est positif ".

Tous les résultats numériques seront écrits jusqu'à la 4ème décimale.

(a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation puis résumer celle-ci dans un tableau à double entrée.

Solution:



	T	$\overline{T}$	
M	$0,2548$	$0,0052$	$0,26$
$\overline{M}$	$0,0592$	$0,6808$	$0,74$
	$0,3140$	$0,6860$	1

(b) Déterminer $P(T)$

Solution: $P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,3140$

(c) Déterminer la probabilité qu'un animal soit malade lorsque le test est positif.

Solution: $P\left(\overline{M}|\overline{T}\right) = \dfrac{0,2548}{0,314} = 0,8115$

7 Dans une classe de 30 élèves, 70% sont des filles, 40% des élèves suivent l'option maths et 30% des élèves sont des filles qui suivent l'option maths. On note F pour fille et O pour option maths.

Attention : ne pas confondre "30% des élèves sont des filles qui suivent l'option maths" et "30% des filles suivent l'option maths".

(a) Résumer la situation dans un tableau à double entrée.

Solution: ne pas confondre "30% des élèves sont des filles qui suivent l'option maths" et "30% des filles suivent l'option maths". La première proposition correspond à la probabilité de choisir un élève qui est une fille et qui suit l'option maths tandis que la seconde correspond à la probabilité de choisir un élève qui suit l'option maths si c'est une fille!

On a donc : $P(F) = 0,70$, $P(O) = 0,40$ et $P(O \cap F) = 0,30$.

	F	$\overline{F}$	
O	$0,30$	$0,10$	$0,40$
$\overline{O}$	$0,40$	$0,20$	$0,60$
	$0,70$	$0,30$	1

ou

	F	$\overline{F}$	
O	9	3	12
$\overline{O}$	12	6	18
	21	9	30

(b) Déterminer $P\left(\overline{F} \cap O\right)$

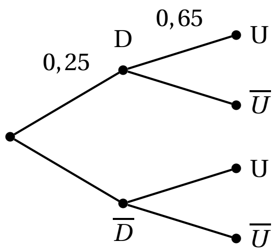
Solution: $P\left(\overline{F} \cap O\right) = 0,10$

8 La médiathèque d'une université possède des DVD de deux provenances, les DVD reçus en dotation et les DVD achetés. Par ailleurs, on distingue les DVD qui sont de production européenne et les autres. On choisit au hasard un de ces DVD. On note :

— D l'évènement « le DVD a été reçu en dotation » et $\overline{D}$ l'évènement contraire,

— U l'évènement « le DVD est de production européenne » et $\overline{U}$ l'évènement contraire.

On modélise cette situation aléatoire par l'arbre incomplet suivant dans lequel figurent quelques probabilités par exemple, la probabilité que le DVD ait été reçu en dotation est $P(D) = 0,25$.



On donne, de plus, la probabilité de l'évènement U : $P(U) = 0,7625$.

(a) Calculer la probabilité que le DVD choisi ait été reçu en dotation et soit de production européenne (donner la valeur exacte).

Solution: On sait que : $P(U|D) = 0,65$

Par conséquent : $P(D \cap U) = P(U|D) \times P(D) = 0,65 \times 0,25 = 0,1625$

(b) Montrer que la probabilité que le DVD choisi ait été acheté et soit de production européenne est égale à 0,6.

Solution: On recherche $P(U \cap \overline{D})$

Formule des probabilités totales : $P(U) = P(U \cap D) + P(U \cap \overline{D})$

$$P(U \cap \overline{D}) = P(U) - P(U \cap D) = 0,7625 - 0,1625 = 0,6$$

(c) Sachant que le DVD choisi a été acheté, calculer la probabilité qu'il soit de production européenne.

Solution: $P(U|\overline{D}) = 0,8$

(d) Sachant que le DVD choisi soit de production européenne, calculer la probabilité qu'il provienne d'une donation.

Solution: $P(D|U) = 0,2131$

9 Probabilités composées

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Indication : établir un arbre pondéré

Solution:

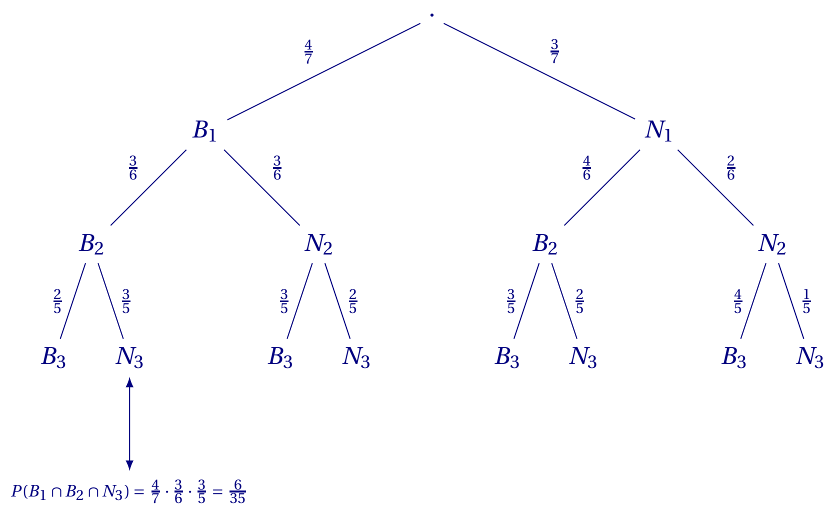
On note B_i (resp. N_i) l'événement : "La i-ème boule tirée est blanche (resp. noire)".

On cherche à calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3)$, ce que l'on va faire en utilisant la formule des probabilités composées :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(N_3|B_1 \cap B_2).$$

Chacune des probabilités qui apparaît est facile à calculer, car $P(B_1) = 4/7$, $P(B_2|B_1) = 3/6$ (il reste 6 boules dont 3 blanches) et $P(N_3|B_1 \cap B_2) = 3/5$.

Finalement, on obtient $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{6}{35}$.



10 QCM

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Indication : Utiliser la formule de Bayes.

Solution:
On note :

$$B = \{\text{L'étudiant donne la bonne réponse}\}$$
$$C = \{\text{L'étudiant connait la bonne réponse}\}.$$

On cherche $P_B(C) = P(C|B)$, et l'énoncé donne :

$$P(C) = p,\ P(B|C) = 1,\ P(B|\overline{C}) = \frac{1}{m}.$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(B)P(B|C) + P(\overline{C})P(B|\overline{B}) = \frac{(m-1)p+1}{m}.$$

D'après la formule de Bayes :

$$P(C|B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)} = \frac{mp}{1+(m-1)p}.$$

11 Dé pipé

Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition d'un six soit de 1/2. On choisit un dé au hasard, on le jette, et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
Indication : Noter D l'événement : "le dé est pipé", et S l'événement : "on obtient 6". L'énoncé donne $P(D)$, et $P(S|D)$. Comment calculer $P(D|S)$?

Solution:
On note D l'événement : "le dé est pipé", et S l'événement : "on obtient 6". L'énoncé donne $P(D) = 25/100$ et $P(S|D) = 1/2$? La formule de Bayes nous permet de calculer $P(D|S)$:

$$P(D|S) = \frac{P(D)P(S|D)}{P(D)P(S|D) + P(\overline{D})P(S|\overline{D})}.$$

Comme on a $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 3/4$ et $P(S|\overline{D}) = 1/6$, on obtient finalement :

$$P(D|S) = \frac{1}{2}.$$

12 Pièces défectueuses

Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0,05 de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :
— si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.
— si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.
On choisit une pièce au hasard et on la contrôle.Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Indication : Décomposer l'événement en "bonne et refusée" et "mauvaise et acceptée", ces deux événements étant incompatibles. C'est la formule de Bayes !

Solution:

1. On note A l'événement "la pièce est acceptée par le contrôle", et B l'événement "la pièce est bonne". L'événement E "Il y a une erreur au contrôle" se décompose en $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$. Ces deux derniers événements sont incompatibles, on a donc :
$$P(E) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B).$$
Maintenant, $P(A \cap \overline{B}) = P(A|\overline{B})P(\overline{B})$. Or, $P(\overline{B}) = 0,05$, et $P(A|\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}|\overline{B}) = 0,02$. De même, on a $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}|B)P(B)$ et on a $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) = 0,04$. On obtient finalement :
$$P(E) = 0,95 \times 0,04 + 0,05 \times 0,02.$$
2. Dans cette question, on cherche $P(\overline{B}|A)$ alors que l'on connait les probabilités conditionnelles sachant B. Ceci nous invite à utiliser la formule de Bayes.
$$\begin{aligned} P(\overline{B}|A) &= \frac{P(\overline{B})P(A|\overline{B})}{P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})} \\ &= \frac{0,05 \times 0,02}{0,95 \times 0,96 + 0,05 \times 0,02} = \frac{1}{913} \simeq 0,001. \end{aligned}$$