Aide-mémoire *Fonctions exponentielles*

Introduction

Nous nous sommes jusqu'à maintenant limités à l'étude des fonctions algébriques. Nous sommes par conséquent familiers avec des fonctions telles

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\; x\mapsto x^2 \quad \text{ou} \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\; x\mapsto \sqrt{x}$$

Ces deux fonctions ont pour caractéristique d'être définies à l'aide d'une expression contenant une variable élevée à une puissance constante.

En inversant les rôles et en élevant une constante (non négative et différente de l'unité) à une puissance variable, on obtient une des plus importantes classes de fonctions qui existent en mathématiques, la fonction exponentielle.

En voici deux exemples : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\; x\mapsto 2^x$ et aussi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\; x\mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

On note également 2^x par $\exp_2(x)$.

Propriétés des puissances

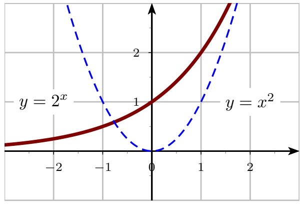
$\forall m,n\in\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}_0^+$: $\quad a^0=1;\; a^m\cdot a^n=a^{m+n};\; \dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n};\; (a^m)^n=a^{m\cdot n}$

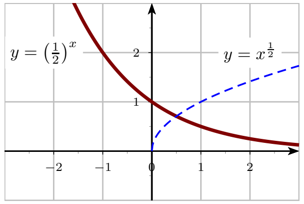
Fonction exponentielle

De façon générale, la fonction $\exp_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\; x\mapsto \mathbf{a}^x$ avec $a>0$ et $a\neq 1$, définit une fonction exponentielle de base a. C'est une fonction continue sur son domaine de définition.

Graphiques et comparaison

Contrairement aux fonctions polynomiales, la "variable" est à la place de l'exposant tandis que la base est constante.





☐ **Propriétés importantes :** Toute fonction $\exp_a$ vérifie

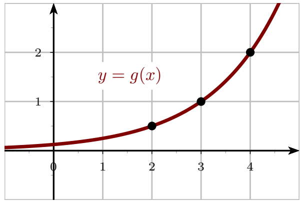
1. dom $f=\mathbb{R}$ et im $f=\mathbb{R}_0^+$ ($\exp_a(x)>0$)
2. son graphe comprend toujours les points $(0;1)$ et $(1;a)$
3. Si $a>1$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ (asymptote horizontale à gauche $y=0$)
4. Si $0<a<1$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (asymptote horizontale à droite $y=0$) et
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

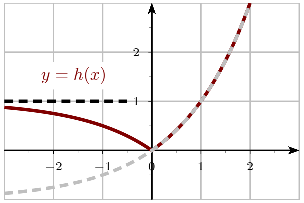
On rappelle encore une fois les raisons pour lesquelles il faut que la base a de l'exponentielle soit un nombre réel strictement positif et différent de 1 ?

- ☐ si a était négatif, certaines puissances de a n'existeraient pas : $f(x)=(-2)^x$ n'est pas définie en $x=1/2$
- ☐ si $a=0$, la fonction $f(x)=0^x$ ne présente aucun intérêt (elle n'est définie que pour des réels strictement positifs et elle vaut alors toujours 0)
- ☐ si a= 1 alors f n'est autre que la fonction constante $f:x\mapsto 1$.

Manipulations de graphes

Il est intéressant d'utiliser les manipulations de graphes vues en 4ème et en 5ème pour obtenir des graphes de fonctions exponentielles construites à partir de fonctions plus simples. Par exemple, $g(x)=2^{x-3}$ ou $h(x)=\left|2^x-1\right|$





Propriétés des fonctions exponentielles

$\forall a,b\in\mathbb{R}_0^+\setminus\{1\}$ et $x,\,y$ variables réelles.

1. $\exp_a(-x)=\exp_{1/a}(x)$ .... $a^{-x}=\frac{1}{a^x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$
2. $\exp_a(x)\cdot\exp_a(y)=\exp_a(x+y)$ .... $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$
3. $\frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}=\exp_a(x-y)$ .... $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$
4. $(\exp_a(x))^y=\exp_a(x\cdot y)$ .... $(a^x)^y=a^{x\cdot y}$
5. $\exp_{ab}(x)=\exp_a(x)\cdot\exp_b(x)$ .... $(ab)^x=a^x\cdot b^x$
6. $\exp_{\frac{a}{b}}(x)=\frac{\exp_a(x)}{\exp_b(x)}$ .... $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$

Ces six propriétés permettent de simplifier l'expression analytique des fonctions exponentielles

Equations, inéquations, domaines

On appelle (in)équation exponentielle toute équation où l'inconnue apparait en exposant. L'utilisation des propriétés suivantes permet de les résoudre.

☐ **Propriétés :** Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}_0^+\setminus\{1\}$

1. Si $a\in\mathbb{R}_0^+\setminus\{1\}$ alors .... $\exp_a(x)=\exp_a(y)\iff x=y$
2. Si $a>1$ alors la fct. est croissante et ..... $\exp_a(x)<\exp_a(y)\iff x<y$
3. Si $0<a<1$ alors la fct. est décroiss. et ... $\exp_a(x)<\exp_a(y)\iff x>y$

Dérivée première

☐ **Calcul différentiel :** On dérive la fonction exponentielle $x\mapsto a^x$ via le calcul de la limite suivante :

$$\begin{aligned}\exp_a'(x)=\left(a^x\right)' &= \lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{a^x\cdot a^h-a^x}{h}\\ &= \left(\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}\right)\cdot a^x\\ &= \exp_a'(0)\cdot a^x\end{aligned}$$

Interprétation graphique du nombre dérivé en 0

La constante multiplicative $\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}$ est la pente de la tangente au graphe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

On l'écrit donc $\exp_a'(0)$ car $\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}$ correspond à $\lim_{h\to0}\frac{a^{0+h}-a^0}{h}$ qui est la valeur de la dérivée de $\exp_a$ calculée en $x=0$.

Elle dépend de la valeur de la base a de l'exponentielle. La fonction $\exp_a$ est monotone, le signe de sa dérivée dépend uniquement du signe de $\exp_a'(0)$.

$(\forall x\in\mathbb{R})$	$0<a<1$	$\exp_a'(x)<0$	$f:x\mapsto\exp_a(x)$ strict. décroiss.
	$a>1$	$\exp_a'(x)>0$	$f:x\mapsto\exp_a(x)$ strict. croiss.

Actuellement, nous n'avons pas de moyens de calculer cette constante de manière exacte : cela sera possible lorsque nous disposerons des fonctions logarithmiques. Nous pouvons simplement évaluer cette constante de manière **empirique** pour quelques valeurs de a.

☐ **Exemple :** approximation de $\exp_3'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{3^h-1}{h}\left(\overset{\text{FI}}{=}\left[\dfrac{0}{0}\right]\right)$

h	1	0,01	10^{-3}	10^{-8}
$\frac{3^h-1}{h}$	2	1,105	1,099	1,0986

d'où $\exp_3'(0)\approx 1{,}0986$

L'exponentielle naturelle ou exponentielle népérienne

La fonction exponentielle qui est égale à sa dérivée est appelée fonction exponentielle népérienne. La base de cette fonction exponentielle particulière est notée **e** et vaut approximativement 2,718 comme nous allons le montrer dans ce qui suit.

Pour que $\exp_{\mathbf{e}}'(x)=\exp_{\mathbf{e}}(x)$, il suffit de poser $\exp_{\mathbf{e}}'(0)=1$. On a :

$$\exp_{\mathbf{e}}'(0)=1\iff\lim_{h\to0}\frac{\mathbf{e}^h-1}{h}=1\iff\frac{\mathbf{e}^h-1}{h}\approx1\quad\text{quand } h\approx0\ (h \text{ très proche de } 0)$$

Cela signifie aussi que $\mathbf{e}^h-1\approx h$ quand $h\approx0$, et de fil en aiguille :

$$\mathbf{e}^h\approx1+h\ \text{ quand } h\approx0\quad\iff\quad\mathbf{e}\approx(1+h)^{\frac{1}{h}}\ \text{ quand } h\approx0$$

Finalement : $\mathbf{e}=\lim\limits_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ ou bien $\mathbf{e}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (poser $n=1/h$)

Remarque. On note exp cette fonction (on omet le **e** en indice) : $\exp(x)=\mathbf{e}^x$

Aide-mémoire *Fonctions logarithmes*

Introduction

- ☐ John Napier inventa en 1617 les logarithmes, du grec *logos* (rapport, raison) et *arithmos* (nombre), et une méthode de calcul transformant les multiplications en additions.
- ☐ La fonction exponentielle transforme une somme en produit, sa fonction réciproque, la fonction logarithme népérien transforme un produit en somme.

La fonction réciproque de l'exponentielle s'appelle le logarithme. Elle est notée $\log_a$. Elle est définie sur $\mathbb{R}_0^+$, et elle est à valeur dans $\mathbb{R}$.

Pour n'importe quelle base $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

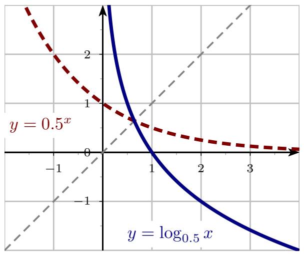
$$\log_a :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\;;\; x \longmapsto \log_a x$$

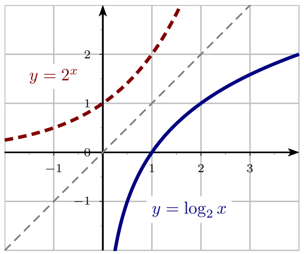
dom $\log_a = \mathbb{R}_0^+$ **im** $\log_a = \mathbb{R}$ $\begin{cases} \log_a(a^x) = x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a(x)} = x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$

Comme la fonction logarithme est la réciproque de la fonction exponentielle, leurs courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$

☐ **Exemple :** $\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$ | $\log_{1/2}(8) = \log_{1/2}\left((1/2)^{-3}\right) = -3$

$3^{\log_3(2)} = 2$ | $3^{\log_3(-2)} \neq -2$ car $-2 \notin$ **dom** $\log_a$





La représentation graphique du logarithme admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

Forme logarithmique

Passage de la forme exponentielle à la forme logarithmique (et inversement) :

$$x = a^y \Longleftrightarrow y = \log_a(x) \quad \text{avec} \quad \boxed{x \in \mathbb{R}_0^+}$$

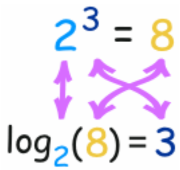
☐ **Exemple :** $64 = 2^6 \iff 6 = \log_2 64$ (se lit : six est le logarithme en base deux de soixante-quatre)

Règles des logarithmes

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$
4. $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
5. $\log_a(x^m) = m \cdot \log_a x$
6. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

☐ **Application :** $\log_3(9x) = \log_3 9 + \log_3 x$

$$= \log_3\left(3^2\right) + \log_3 x$$
$$= 2 + \log_3 x$$



Monotonie

La fonction continue $\log_a$ est

- ☐ strictement croissante lorsque $a > 1$
- ☐ strictement décroissante lorsque $0 < a < 1$

Equivalences utiles

Pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ et $c \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

1. $\log_c(a) = \log_c(b) \iff a = b$
2. $\log_c(a) > \log_c(b) \iff a > b$ lorsque $c > 1$
3. $\log_c(a) > \log_c(b) \iff a < b$ lorsque $0 < c < 1$

Nombre d'Euler

☐ **Rappel :** La fonction exponentielle qui est égale à sa dérivée est appelée fonction exponentielle népérienne (ou naturelle). On note **exp** cette fonction.

La base de cette fonction exponentielle particulière est notée **e** (**e** est appelé le nombre d'Euler) et vaut approximativement 2,718

Pour que $\exp x = \exp' x$ ou encore $\mathbf{e}^x = (\mathbf{e}^x)'$, il suffit de poser $\exp'_{\mathbf{e}}(0) = 1$.

$$\exp'_{\mathbf{e}}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{e}^h - 1}{h} = 1 \Longrightarrow \mathbf{e} = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Logarithmes Népérien / Décimal

Pour tout réel x *strictement positif* :

- ☐ Logarithme **népérien** : $y = \ln(x) \Longleftrightarrow x = \mathbf{e}^y$
  1. Pour tout réel $x > 0$: $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$
  2. Pour tout réel x : $\ln(\mathrm{e}^x) = x$
  3. $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$
- ☐ Logarithme **décimal** : $y = \log(x) \Longleftrightarrow x = 10^y$

Résolution d'(in)équations

1. Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$: $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$.
2. Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$: $\ln(x) < \ln(y) \iff x < y$.
3. Pour tout réel $x > 0$ et tout réel a, $\ln(x) = a \iff x = \mathbf{e}^a$.
4. Pour tout réel $x > 0$ et tout réel a, $\ln(x) < a \iff x < \mathbf{e}^a$.

Dérivée de la fonction exponentielle

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, on a $a = \mathbf{e}^{\ln a}$ et donc, $\forall x \in \mathbb{R} : a^x = \left(\mathbf{e}^{\ln a}\right)^x = \mathbf{e}^{x \ln a}$

La fonction exponentielle de base a est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\exp_a : x \longmapsto a^x = \mathbf{e}^{x \ln a}$$

On démontre aisément que $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ via la dérivée d'une composition de deux fonctions.

Changement de base des logarithmes

On peut écrire la relation $y = \log_a x$ en fonction du logarithme népérien. On applique ln aux deux membres de la relation $a^y = x$ pour obtenir

$$\ln(a^y) = \ln x \iff y \cdot \ln a = \ln x \iff y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Conclusion : $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ et aussi, $\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

☐ **Exemple :** $\log x = \frac{\ln x}{\ln(10)} \approx 0,4343 \ln x$

Dérivée de la fonction logarithme

La fonction logarithme népérien est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_0^+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \;:\; (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Il suffit de dériver l'égalité $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ membre à membre pour démontrer cette propriété (théorème de dérivation des fonctions composées).

☐ **Variation :** La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_0^+$ puisque sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}_0^+$.

La différence principale entre les divers types de logarithmes est la constante multiplicative. Il n'y a par conséquent aucune difficulté à dériver $\log_a$.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad \text{(voir monotonie)}$$

☐ **Composition :** Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Propriétés analytiques

- ☐ Limites aux bornes du domaine : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- ☐ Théorème de croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- ☐ Nombre dérivé en 1 : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$