Croissance et décroissance exponentielle

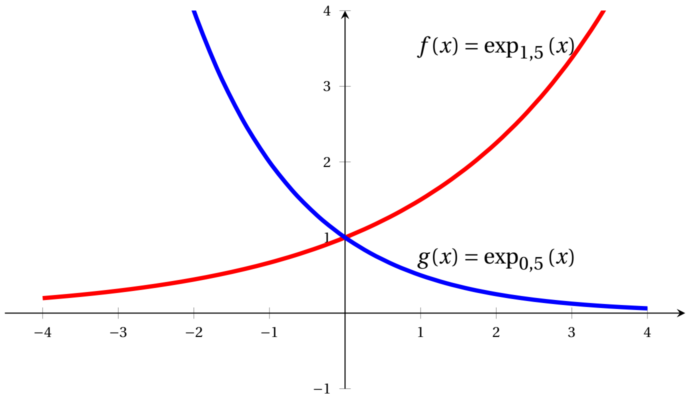
F. Lancereau

6 janvier 2025

- **Introduction :**
  - Croissance de populations, par exemple des bactéries.
  - Désintégration radioactive.
  - Diffusion d'informations sur Internet et les réseaux sociaux.
  - Propagation d'épidémies.
- **Croissance des bactéries :**
  - Division rapide dans des conditions idéales.
  - Croissance exponentielle en progression géométrique.
  - Accélération continue selon un modèle exponentiel.
- **Désintégration radioactive :**
  - Processus spontané de transformation en éléments stables.
  - Diminution exponentielle suivant une loi exponentielle.
  - Temps de demi-vie pour que la moitié des atomes se désintègrent.
- **Construction de la fonction exponentielle :**
  - Fonction $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$.
  - Prolongement en une fonction $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$.

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto a^x$$

  - Représentation graphique de deux fonctions exponentielles



- **Propriétés des Fonctions Exponentielles quelconques :**
  - Strictement croissante (ou décroissante) selon a.
  - Continue et dérivable.
  - Dérivée $(\exp_a x)' = k \cdot \exp_a x$.
  - La fonction $\exp_a$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) lorsque $k > 0$ (resp. $k < 0$).
  - Lorsque $a > 1$:

$$\lim_{x\to-\infty} \exp_a x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp_a x = +\infty.$$

  - Lorsque $0 < a < 1$:

$$\lim_{x\to-\infty} \exp_a x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp_a x = 0.$$

  - Le graphe cartésien de la fonction $\exp_a$ comprend toujours le point $(0, 1)$.
  - Propriétés d'injectivité et d'ordre :

$$\exp_a x = \exp_a y \iff x = y$$

$$\exp_a x < \exp_a y \iff \begin{cases} x < y, & \text{si } a > 1, \\ x > y, & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$$