# Croissance et décroissance exponentielle

F. Lancereau

5 janvier 2025

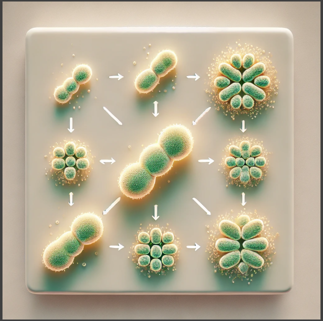
# Introduction

On parle de phénomène exponentiel pour :

- la croissance de populations, par exemple des bactéries ;
- la désintégration radioactive ;
- la diffusion d'informations sur Internet et les réseaux sociaux ;
- la propagation d'épidémies.

# La croissance des bactéries

- **Division rapide :** Les bactéries se multiplient rapidement dans des conditions idéales.
- **Croissance exponentielle :** Une bactérie devient 2, puis 4, puis 8, formant une progression géométrique.
- **Accélération continue :** La vitesse de croissance reflète un *modèle exponentiel*.

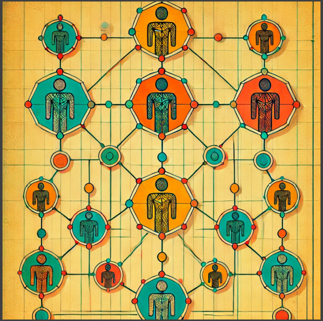


# La désintégration radioactive

- **Processus spontané :** Les atomes radioactifs se désintègrent en éléments plus stables.
- **Diminution exponentielle :** La quantité diminue selon une *loi exponentielle*.
- **Temps de demi-vie :** Temps nécessaire pour que la moitié des atomes se désintègrent.

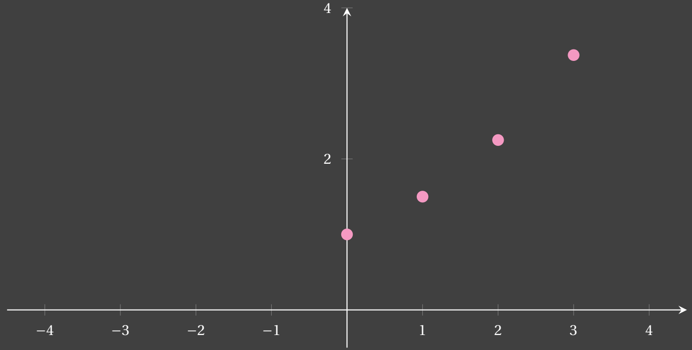
# Diffusion d’informations sur Internet

- **Taux de reproduction :** Chaque partage multiplie l’audience, créant une propagation en chaîne.
- **Croissance exponentielle :** La diffusion suit un modèle exponentiel où la croissance est rapide.



# Construction

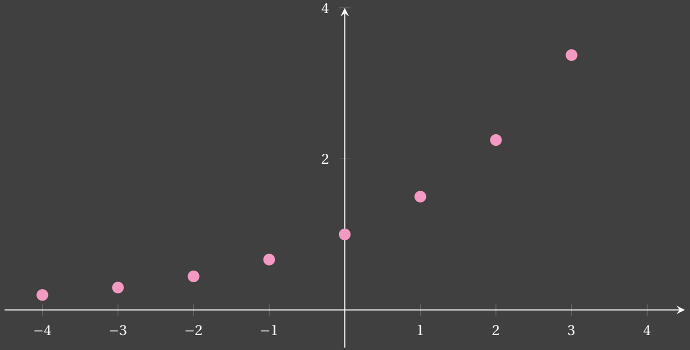
La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto 1{,}5^x$




rappel : suite géométrique

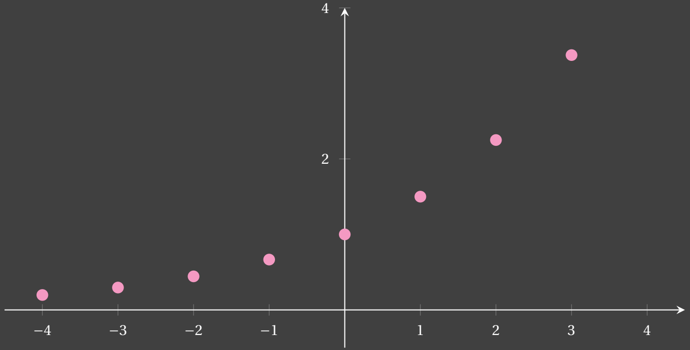
# Construction

La fonction $f : \color{green}{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto 1,5^x$



# Construction

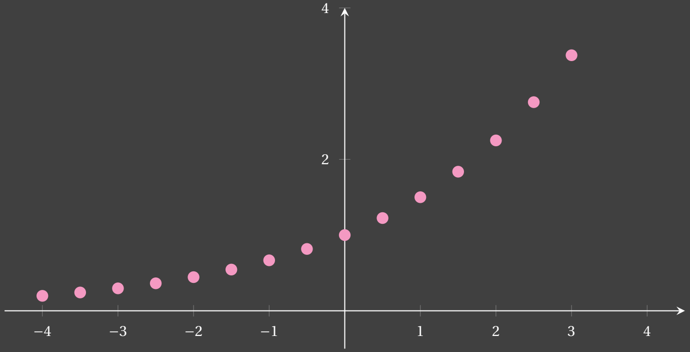
La fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto 1{,}5^x$




on prolonge dans les entiers naturels négatifs

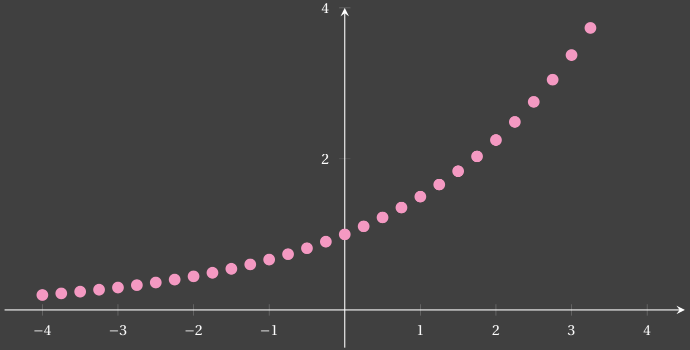
# Construction

La fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto 1,5^x$



# Construction

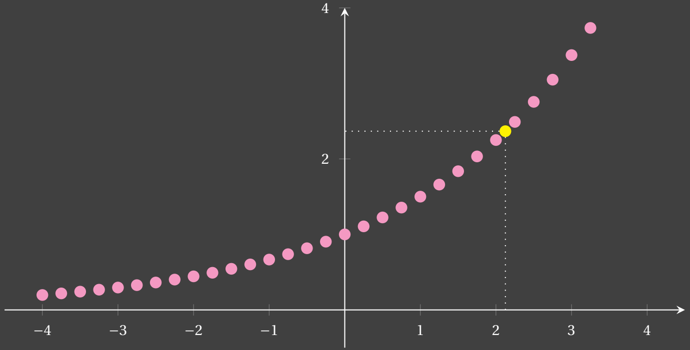
La fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto 1,5^x$




on continue de plus belle dans les rationnels : ex. $1,5^{2,125} \approx 2,367$

# Construction

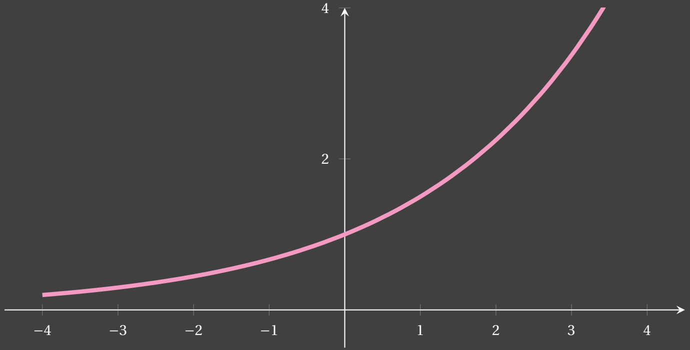
La fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto 1{,}5^x$




on continue de plus belle dans les rationnels : ex. $1{,}5^{2{,}125} \approx 2{,}367$

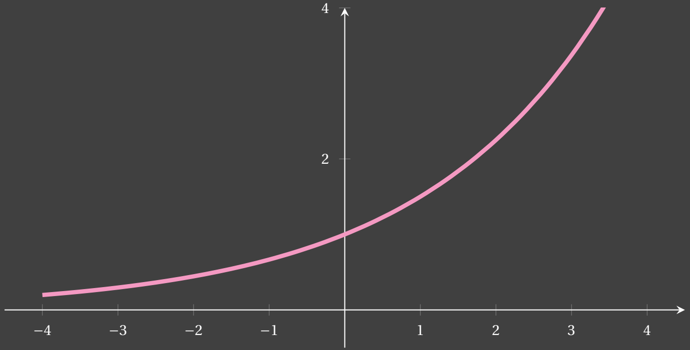
# Construction

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $x \mapsto 1,5^x$



# Construction

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto 1,5^x$




on prolonge enfin cette fonction dans $\mathbb{R}$

# Exponentielle quelconque

**Définition**

Toute fonction $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto a^x$ pour laquelle $a$ est un réel strictement positif, distinct de 1, se prolonge de façon unique en une fonction

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

# Exponentielle quelconque

**Définition**

Toute fonction $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto a^x$ pour laquelle $a$ est un réel strictement positif, distinct de 1, se prolonge de façon unique en une fonction

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

telle que :

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ et $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ pour tout réels $x$ et $y$;
- la fonction est continue et dérivable en tout réel.

**pour $a$ réel strictement positif différent de 1**

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto a^x$$

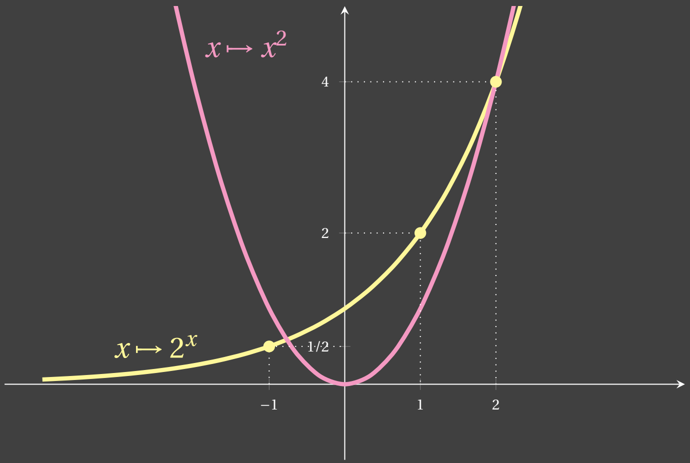
Lorsque $a$ est un réel strictement positif, distinct de 1, cette fonction porte le nom de fonction exponentielle de base $a$, et on la note $\exp_a$ avec $\exp_a(x) = a^x$.

**Exemples**

1. Fonction exponentielle de base 2 : $\exp_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto 2^x$
2. Fonction exponentielle de base $\frac{1}{2}$ : $\exp_{\frac{1}{2}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto 0,5^x$

# Ne pas confondre . . .

avec une fonction puissance de $x$



# Exponentielle quelconque

Voici plusieurs propriétés de la fonction exponentielle :

- La fonction $\exp_a$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) lorsque $a > 1$ (resp. $0 < a < 1$).
- Le graphe cartésien de la fonction $\exp_a$ comprend toujours le point $(0, 1)$.
- Propriétés d'injectivité et d'ordre :

$$\exp_a x = \exp_a y \iff x = y$$

$$\exp_a x < \exp_a y \iff \begin{cases} x < y, & \text{si } a > 1, \\ x > y, & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

# Exponentielle quelconque

Voici d'autres propriétés très importantes :

- La dérivée de toute fonction exponentielle est un multiple d'elle-même :

$$\boxed{(\exp_a x)' = k \exp_a x}$$

- La fonction $\exp_a$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) lorsque $k > 0$ (resp. $k < 0$).
- Lorsque $a > 1$ :

$$\lim_{x \to -\infty} \exp_a x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \exp_a x = +\infty.$$

- Lorsque $0 < a < 1$ :

$$\lim_{x \to -\infty} \exp_a x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \exp_a x = 0.$$