Logarithmes et Applications

F. Lancereau

31 décembre 2024

Définition des Logarithmes

Le logarithme décimal d'un nombre réel strictement positif x, noté $\log(x)$, est l'exposant auquel il faut élever 10 pour obtenir x.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\log \bullet"] & \log(x) \arrow[l, bend left, "10^{\bullet}"] \end{tikzcd}$$

Exemple

$$\log(100) = 2 \text{ car } 10^2 = 100$$

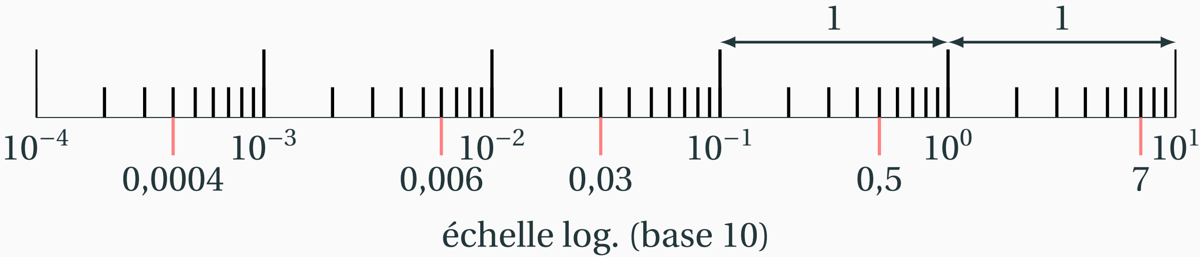
Définition des Logarithmes

Les logarithmes permettent de manipuler plus facilement des nombres très grands ou très petits.

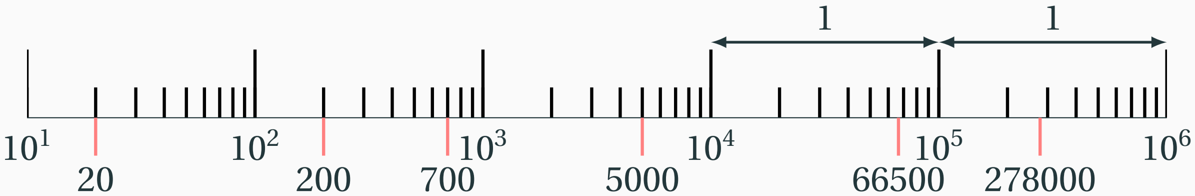
Exemple

Il est plus simple de manipuler 9 puisque $9 = \log(1\,000\,000\,000)$ que de travailler directement avec le nombre $1\,000\,000\,000$.

Logarithmes et échelles réduites



Logarithmes et échelles réduites



échelle log. (base 10)

Propriété de la multiplication

La formule $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ simplifie la multiplication de grands nombres.

Exemple

$$\log(100 \times 1000) = \log(100) + \log(1000) = 2 + 3 = 5$$

La démonstration de cette formule sera présentée plus tard.

Applications aux décibels

L'échelle des décibels est basée sur une échelle logarithmique :

$$L = 10\ \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I est l'intensité du son en $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$ et I_0 le seuil d'audibilité (intensité au-dessous de laquelle on n'entend pas le son). *Note* : $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$

Exemple

Si l'intensité sonore double, l'augmentation en décibels est de 3 dB.

Applications aux décibels

Preuve

on remplace I par $2 \times I$ dans la formule :

$$\begin{aligned}
L' = 10\ \log\left(\frac{2 \times I}{I_0}\right) &= 10\left(\log(2) + \log\left(\frac{I}{I_0}\right)\right) \\
&= 10\ \log(2) + 10\ \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \\
&\approx 3 + 10\ \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 3 + L \qquad \Longrightarrow L' = L + 3
\end{aligned}$$

Applications au pH

Le pH d’une solution est également basé sur une échelle logarithmique :

$$\text{pH} = -\log\left([H_3O^+]\right)$$

où la concentration en ions oxonium $\left[H_3O^+\right]$ est exprimée en moles par litres.

Exemple

Si la concentration en ions $[H_3O^+]$ est multipliée par 10, le pH diminue d’une unité.

Applications au pH

Preuve

on remplace $[H_3O^+]$ par $10 \times [H_3O^+]$ dans la formule :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{pH}_{\mathrm{new}} = -\log\left(10 \times [H_3O^+]\right) &= -\log(10) - \log\left([H_3O^+]\right) \\
&= -1 - \log\left([H_3O^+]\right) \\
&= -1 + \mathrm{pH} \qquad \Longrightarrow \mathrm{pH}_{\mathrm{new}} = \mathrm{pH} - 1
\end{aligned}
$$

le pH est bien diminué d'une unité !

Avantages des logarithmes

Applications pratiques des logarithmes

- Les logarithmes permettent de manipuler facilement des valeurs très grandes ou très petites en les réduisant sur une échelle plus simple.
- Ils sont utilisés dans des domaines variés : physique (décibels), chimie (pH), économie, etc.

Acoustique

Calculer le nombre de décibel d'une source sonore ayant une intensité de 10^{-4} watts par mètre carré ?

$$L = 10\ \log\left(\frac{10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 10\ \log\left(10^{8}\right) = 80\ \text{dB}$$

Acidité d'une solution

En ajoutant une solution basique à du vinaigre, on obtient une concentration en H_3O^+ 6000 fois plus petite que la concentration initiale. Comment cette manipulation agit-elle sur le pH ?

$$\begin{aligned}
\mathrm{pH} = -\log\frac{[H_3O^+]}{6000} &= -\left(\log\left[H_3O^+\right] - \log 6000\right) \\
&= -\log\left[H_3O^+\right] + \log 6000 \\
&= -\log\left[H_3O^+\right] + 3,778
\end{aligned}$$

Le pH de la solution augmentera de près de 3,78 unités

Acidité d'une solution

Pour que le pH d'une solution augmente de $4,2$, comment doit-on agir sur la concentration en H_3O^+ de cette solution ?

$$\begin{aligned}
\mathrm{pH} + 4,2 &= -\log\left[H_3O^+\right] + 4,2 \\
&= -\log\left[H_3O^+\right] + \log\left(10^{4,2}\right) \\
&= -\left(\log\left[H_3O^+\right] - \log\left(10^{4,2}\right)\right) \\
&= -\log\frac{\left[H_3O^+\right]}{10^{4,2}} = -\log\left(\frac{\left[H_3O^+\right]}{15848}\right)
\end{aligned}$$

La concentration en H_3O^+ est environ 16000 fois inférieure !