

Loi binomiale

F. Lancereau

15 avril 2025

Epreuve de Bernoulli

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve aléatoire ne comportant que deux issues contraires :

- ☐ pile ou face,
- ☐ aimer ou ne pas aimer Claude François,
- ☐ avoir ou ne pas avoir son diplôme de rhétos,
- ☐ être ou ne pas être, etc

Epreuve de Bernoulli

Exemple

Une urne contient 5 oursins et 3 balles en mousse. Le tirage d'un objet dans cette urne a deux issues contraires :

- ☐ P : « je me pique » avec la probabilité $5/8$
- ☐ $\bar{P}$: « je ne me pique pas » avec la probabilité $3/8$.

Épreuve de Bernoulli

Caractéristiques

- Expérience aléatoire avec deux issues : Succès (S) ou Échec (E)
- Probabilité de succès : $p \in [0, 1]$
- Probabilité d'échec : $q = 1 - p$

Variable aléatoire de Bernoulli

Définition

C'est une variable aléatoire X qui associe :

- la valeur 1 à un succès avec la probabilité p et
- la valeur 0 à un échec avec la probabilité $1-p$.

Variable aléatoire de Bernoulli

Exemple

On lance un dé équilibré à 6 faces. On gagne si on fait 1 ou 6, on perd sinon.

antécédent	1	2	3	4	5	6
image	S	E	E	E	E	S

- Probabilité d'un Succès : $P(X = 1) = \frac{1}{3}$
- Probabilité d'un Échec : $P(X = 0) = \frac{2}{3}$

Loi de Bernoulli de paramètre p

Définition

On appelle loi de Bernoulli de paramètre p la loi de probabilité de la variable aléatoire de Bernoulli X de paramètre p .

k	0	1
$P(X = k)$	$P(X = 0) = 1 - p$	$P(X = 1) = p$

Loi de Bernoulli de paramètre p

On lance un dé équilibré à 6 faces :

On gagne si on fait 1 ou 6, on perd sinon.

k	0	1
$P(X = k)$	$P(X = 0) = \frac{2}{3}$	$P(X = 1) = \frac{1}{3}$

Loi de Bernoulli de paramètre p

Propriété

L'espérance d'une variable de Bernoulli X de paramètre p est :

$$\mathbf{E}(X) = p$$

Justification

$$\mathbf{E}(X) = \sum x_i \times p_i = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

L'espérance correspond à la valeur moyenne attendue à long terme.

Loi de Bernoulli de paramètre p

Propriété

La variance d'une variable de Bernoulli X de paramètre p est :

$$V(X) = pq \quad \text{avec } q = 1 - p$$

Justification

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (0^2 \times q + 1^2 \times p) - p^2 = p - p^2 = pq$$

La variance mesure la dispersion autour de la moyenne.

Schéma de Bernoulli de paramètre n et p

Définition

Un schéma de Bernoulli est une séquence de n épreuves indépendantes, où chaque épreuve n'a que deux issues possibles :

succès (avec probabilité p) ou échec (avec probabilité $1 - p$)

Exemple

Lancer une pièce de monnaie 10 fois et noter chaque résultat (pile ou face).

Loi binomiale de paramètre n et p

Définition

La loi binomiale est une extension de la loi de Bernoulli. C'est une distribution de probabilité qui décrit le nombre total de succès dans un schéma de Bernoulli.

Le schéma de Bernoulli est le cadre dans lequel se déroulent les épreuves, tandis que la loi binomiale est la distribution qui modélise le nombre de succès obtenus dans ce cadre.

Loi binomiale de paramètre n et p

Définition

- Répétition de n épreuves de Bernoulli
 - identiques et
 - indépendantes
- On s'intéresse au nombre de succès dans la liste des résultats obtenus à la fin des n épreuves.

Loi binomiale de paramètres n et p

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si elle représente **le nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes**, où chaque épreuve a une probabilité de succès p .

Loi binomiale de paramètre n et p

A retenir :

Si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès k dans une série de n épreuves de Bernoulli, alors les probabilités associées à chaque nombre de succès sont données par :

k	0	1	2	...	n
$P(X = k)$	q^n	$C_n^1 \times p \times q^{n-1}$	$C_n^2 \times p^2 \times q^{n-2}$	...	p^n

Loi Binomiale de Paramètres n et p

Vocabulaire et notation

La loi de probabilité de la variable aléatoire X , qui compte le nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes, est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** .

Cette loi est notée **$B(n, p)$** .

Formule générale

$$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$$

$$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$$

- Le nombre de façons de choisir k succès parmi n épreuves est donné par le coefficient binomial C_n^k .

Cela représente le nombre de manières de placer k succès dans n positions.

- La probabilité d'obtenir exactement k succès dans une séquence spécifique est p^k (pour les succès) multiplié par q^{n-k} (pour les échecs).

Exemple

Un questionnaire à choix multiples comporte 5 questions. Pour chacune, 4 réponses sont proposées dont une seule est correcte. Un élève qui n'a pas étudié (ce qui n'arrive jamais) répond au hasard.

C'EST UNE LOI BINOMIALE car ...

- Répétition de 5 épreuves de Bernoulli *identiques et indépendantes*
- On s'intéresse au *nombre de réponses correctes* dans la liste des questions du QCM.
- La variable aléatoire X représente le nombre de réponses correctes lorsque l'élève répond au hasard au questionnaire.
- On note $X \hookrightarrow B(5, \frac{1}{4})$ avec $p = \frac{1}{4}$ est la probabilité de “tomber” sur une bonne réponse.

- Le risque d'avoir tout faux correspond à la probabilité d'avoir 0 bonne réponse :

$$P[X = 0] = C_5^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{5-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024} \approx 0,237$$

- La probabilité d'avoir exactement 3 bonnes réponses est :

$$P[X = 3] = C_5^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{5-3} = 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} = \frac{90}{1024} \approx 0,0879$$

□ Quels sont les chances de réussir s'il faut au moins 60%?

Il suffit de calculer la probabilité d'avoir 3 ou 4 ou 5 questions réussies :

$$\begin{aligned}P[X \geq 3] &= P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] \\&= C_5^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_5^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C_5^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 \\&= \frac{106}{1024} \approx 0,104\end{aligned}$$

Loi binomiale

A retenir :

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et soit X le nombre de succès obtenu.

- On dit que X est la *variable aléatoire* associée à ce schéma.
- On dit aussi que la *variable aléatoire* X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p .
- On note $X \hookrightarrow B(n, p)$.

Loi binomiale - Espérance mathématique

A retenir :

- En simulant de nombreuses fois un schéma de Bernoulli avec les paramètres n et p , la moyenne du nombre de succès s'approche d'un nombre réel appelé espérance mathématique de la variable aléatoire X , notée $E(X)$.
- L'espérance mathématique de la loi binomiale de paramètres n et p est :

$$E(X) = np$$

Loi binomiale - Variance mathématique

- La variance d'une variable aléatoire est la quantité qui mesure la *dispersion* de X autour de sa moyenne, c'est à dire son espérance.
- $V(X)$ est la moyenne de l'écart au carré de valeurs par rapport à la moyenne
- Si les succès sont exprimés en euro, l'espérance est exprimée en euro et la variance en euro².

Loi binomiale - Variance mathématique

A retenir :

Soit un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p et soit X le nombre de succès obtenu.

- formule de la variance : $V(X) = np(1 - p)$
- formule de l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$