Produit scalaire et trigonométrie

F. Lancereau

18 avril 2025

Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

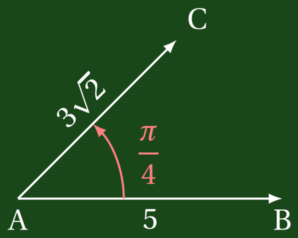
Notation : $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ est l'angle formé par les deux vecteurs et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ sont les normes (longueurs) des vecteurs

Applications

- ☐ Calcul d'angles entre vecteurs.
- ☐ Détermination de l'orthogonalité.

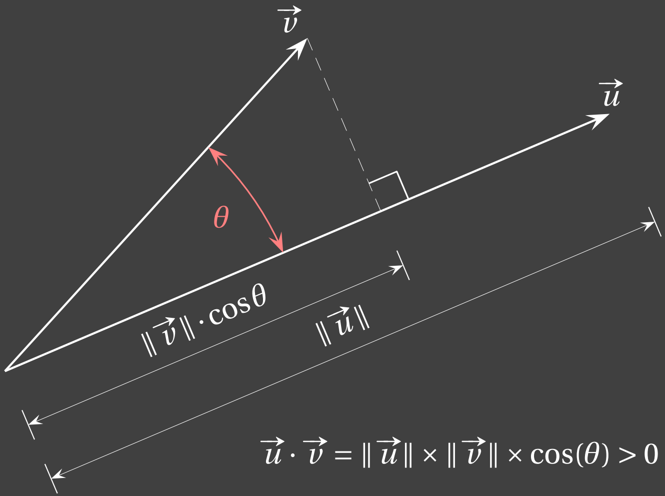
Exemple dans le plan

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs avec $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$, $AB = 5$ et $AC = 3\sqrt{2}$.



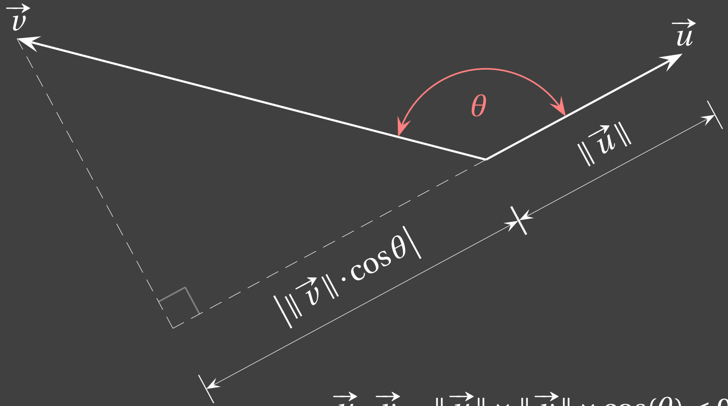
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 3\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 15\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 15$$

Signe du produit scalaire



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta) > 0$$

Signe du produit scalaire



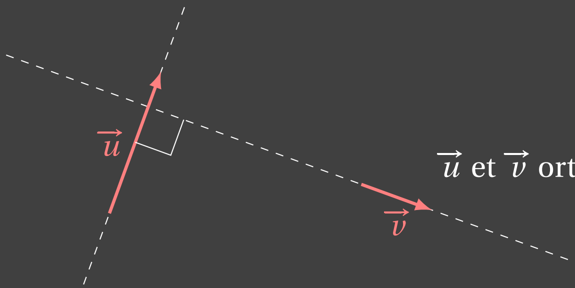
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\theta) < 0$$

Propriétés géométriques

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel :

1. *positif* quand $0° < \theta < 90°$
2. *négatif* quand $90° < \theta < 180°$
3. *nul* quand $\theta = 90°$ (les deux vecteurs sont **orthogonaux** (perpendiculaires))

En général, le produit scalaire n'a pas de signification géométrique particulière, sauf lorsqu'il s'agit de l'orthogonalité entre deux vecteurs.



$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ orthogonaux} \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Dans un repère orthonormé

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, dans tout repère orthonormé,

si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors : $\quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x \times x' + y \times y'$

Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont exprimés dans un repère orthonormé, le produit scalaire peut être calculé simplement à partir de leurs coordonnées.

et on a,

$$\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\theta) = x \times x' + y \times y'$$

Dans l'espace, c'est pareil !

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, alors :

$$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta) = x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2 + z_1 \times z_2$$

Exemple

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 4 \times \cos\theta = 0 \quad \Longrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

les deux vecteurs sont orthogonaux !

Application pour trouver la mesure d'un angle

Dans le plan :

Soit $\overrightarrow{u}\binom{5}{-2}$ et $\overrightarrow{v}\binom{1}{7}$. Alors, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5 \times 1 + (-2) \times 7 = -9$

Application pour trouver la mesure d'un angle

Dans le plan :

Soit $\overrightarrow{u}\binom{5}{-2}$ et $\overrightarrow{v}\binom{1}{7}$. Alors, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 5\times 1 + (-2)\times 7 = -9$

Et aussi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\\
&= \sqrt{5^2+(-2)^2}\times\sqrt{1^2+7^2}\times\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\\
&= \sqrt{29}\times\sqrt{50}\times\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\\
&= 5\sqrt{58}\times\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right).
\end{aligned}$$

Application pour trouver la mesure d'un angle

Dans le plan :

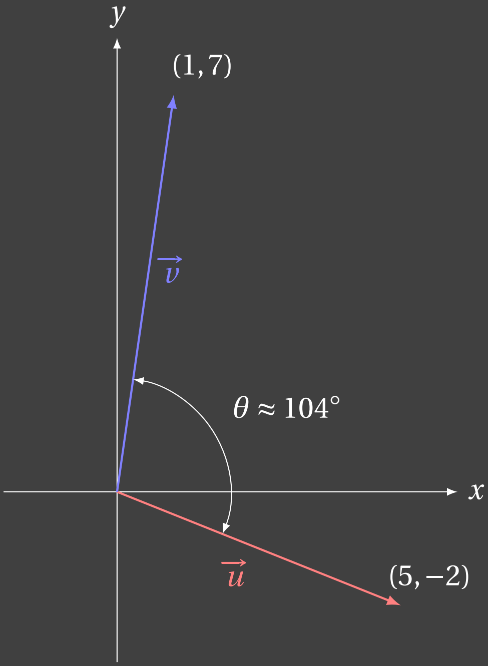
Soit $\vec{u}\binom{5}{-2}$ et $\vec{v}\binom{1}{7}$. Alors, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\times 1 + (-2)\times 7 = -9$

Et aussi,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= \sqrt{5^2+(-2)^2}\times\sqrt{1^2+7^2}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= \sqrt{29}\times\sqrt{50}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= 5\sqrt{58}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right).\end{aligned}$$

Donc : $\quad -9 = 5\sqrt{58}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) \implies \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = -\dfrac{9}{5\sqrt{58}} \approx -0,236351579148\,.$

On en déduit $\left(\vec{u},\vec{v}\right)\approx 104°$.

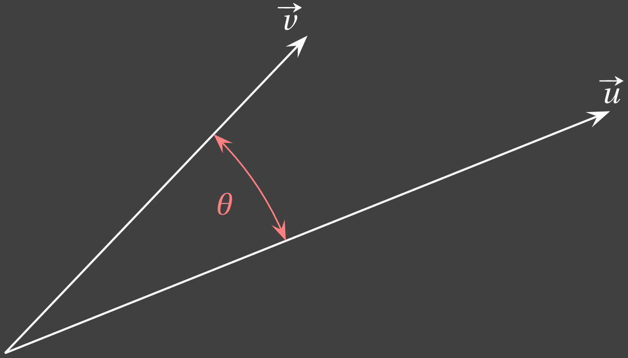


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 1 + (-2) \times 7 = -9$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\| \vec{u} \| \| \vec{v} \|} = \frac{-9}{5\sqrt{58}} \approx -0.236$$

$$\theta \approx 104°$$

Formule pratique



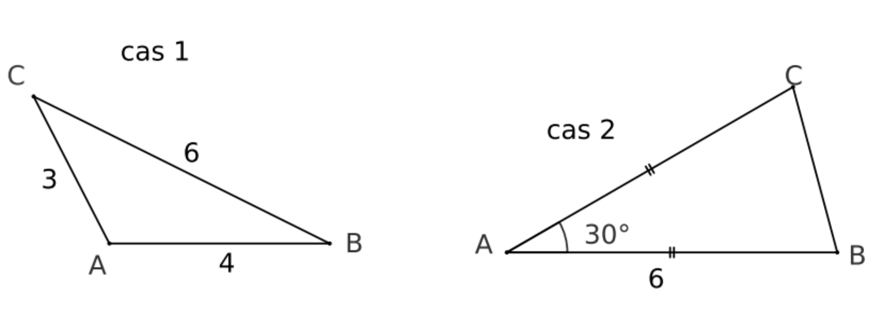
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \|}\right).$$

Propriétés très utiles

à retenir

1. Le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même est égal au carré de sa longueur ou norme : $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.
2. Le produit scalaire de deux vecteurs est **commutatif** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
3. Il y a **distributivité** du produit scalaire par rapport à l'addition des vecteurs : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
4. Il y a **associativité mixte** : $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v})$.
5. Le vecteur nul est **absorbant** pour le produit scalaire : $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.

Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$:



Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$: