Variable aléatoire discrète

Frédéric Lancereau

10 avril 2025

Vocabulaire

- Une variable aléatoire est une fonction qui associe des nombres à des événements aléatoires.

Vocabulaire

- Une variable aléatoire est une fonction qui associe des nombres à des événements aléatoires.
- Une *variable aléatoire discrète* est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs **entières**, en nombre fini ou dénombrable.

Vocabulaire

- Une variable aléatoire est une fonction qui associe des nombres à des événements aléatoires.
- Une *variable aléatoire discrète* est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs **entières**, en nombre fini ou dénombrable.
- Associer à chacune des valeurs possibles de la variable aléatoire la probabilité qui lui correspond, c'est définir la **loi de probabilité** ou la *distribution de probabilité* de la variable aléatoire.

Vocabulaire

- Une variable aléatoire est une fonction qui associe des nombres à des événements aléatoires.
- Une *variable aléatoire discrète* est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs **entières**, en nombre fini ou dénombrable.
- Associer à chacune des valeurs possibles de la variable aléatoire la probabilité qui lui correspond, c'est définir la **loi de probabilité** ou la *distribution de probabilité* de la variable aléatoire.
- La **fonction de densité** discrète f est la fonction de $\mathbb{R} \to [0,1]$ qui à tout nombre réel x_i associe $f(x_i) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$. On a bien sûr $\sum f(x_i) = 1$.

Exemple

Pile ou Face

On jette deux fois une pièce de monnaie non truquée, et on s'intéresse au nombre de fois que le côté "face" a été obtenu. Pour calculer les probabilités des divers résultats, on introduira une variable X qui désignera le nombre de "face" obtenu. X peut prendre les valeurs 0,1,2.

Exemple

Pile ou Face

On jette deux fois une pièce de monnaie non truquée, et on s'intéresse au nombre de fois que le côté "face" a été obtenu. Pour calculer les probabilités des divers résultats, on introduira une variable X qui désignera le nombre de "face" obtenu. X peut prendre les valeurs 0,1,2.

$$f(0) = P(X = 0) = P((\text{pile},\text{pile})) = \frac{1}{4};$$

$$f(1) = P(X = 1) = P((\text{pile},\text{face})) + P((\text{face},\text{pile})) = \frac{1}{2};$$

$$f(2) = P(X = 2) = P((\text{face},\text{face})) = \frac{1}{4};$$

$$f(x) = 0 \text{ si } x \notin \{0,1,2\}.$$

Exemple

Pile ou Face

On jette deux fois une pièce de monnaie non truquée, et on s'intéresse au nombre de fois que le côté "face" a été obtenu. Pour calculer les probabilités des divers résultats, on introduira une variable X qui désignera le nombre de "face" obtenu. X peut prendre les valeurs 0,1,2.

Fonction de distribution

x	0	1	2	
$f(x) = P(X = x)$	1/4	1/2	1/4	1

Fonction de répartition

La *fonction de répartition* d'une variable aléatoire X indique pour chaque valeur réelle x la probabilité que X prenne une valeur au plus égale à x. C'est la somme des probabilités des valeurs de X jusqu'à x. On la note F.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i).$$

La fonction de répartition est toujours croissante et comprise entre 0 et 1.

x	0	1	2	type
$f(x) = P(X = x)$	1/4	1/2	1/4	fonction de distribution
$F(x) = P(X \leq x)$	1/4	3/4	1	fonction de répartition

Fonction de répartition de X

Définition : $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]\ ;\ x \longmapsto P(X \leq x)$

Exemple

Une urne contient neuf boules. Quatre de ces boules portent le numéro 0, trois portent le numéro 1 et deux le numéro 2. Tous les tirages sont supposés **équiprobables**.
On tire au hasard deux boules **simultanément**. Soit X, la somme des numéros marqués sur ces boules.

Fonction de distribution de X (ou Loi de probabilité de X)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{36}$

Définition : $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]\ ;\ x \longmapsto P(X \leq x)$

Exemple

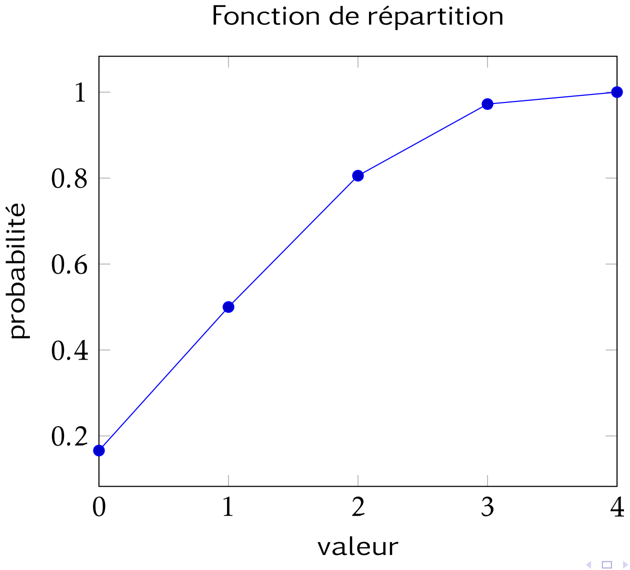
Une urne contient neuf boules. Quatre de ces boules portent le numéro 0, trois portent le numéro 1 et deux le numéro 2. Tous les tirages sont supposés **équiprobables**.

On tire au hasard deux boules **simultanément**. Soit X, la somme des numéros marqués sur ces boules.

Fonction de répartition de X

x_i	0	1	2	3	4
$F(x_i) = P(X \leq x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{29}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

Illustration



Pour calculer $P(1 \leq X \leq 3)$

Connaissant la fonction de répartition de X :

x_i	0	1	2	3	4
$F(x_i) = P(X \leq x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{29}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

Il suffit de calculer :

$$P(1 < X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 1) = F(3) - F(1) = \frac{17}{36}$$

Pour calculer $P(1 \leq X \leq 3)$

Connaissant la fonction de répartition de X :

x_i	0	1	2	3	4
$F(x_i) = P(X \leq x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{29}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

Il suffit de calculer :

$$P(1 < X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 1) = F(3) - F(1) = \frac{17}{36}$$

Remarque : $P(2 \leq X \leq 3) = P(1 < X \leq 3)$

Exemple

Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé non pipé et considérons le jeu suivant :

- si le joueur obtient un "6", il gagne 5 €
- s'il obtient un nombre pair autre que "6", il gagne 1 €
- par contre, s'il obtient un point impair, il perd 2 €

Espérance d'une variable aléatoire

Exemple

Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé non pipé et considérons le jeu suivant :

- si le joueur obtient un "6", il gagne 5 €
- s'il obtient un nombre pair autre que "6", il gagne 1 €
- par contre, s'il obtient un point impair, il perd 2 €

Question : Ce jeu est-il intéressant pour le joueur ?

Espérance d'une variable aléatoire

Exemple

Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé non pipé et considérons le jeu suivant :

- si le joueur obtient un "6", il gagne 5 €
- s'il obtient un nombre pair autre que "6", il gagne 1 €
- par contre, s'il obtient un point impair, il perd 2 €

Question : Ce jeu est-il intéressant pour le joueur ?

Que peut-il espérer gagner ?

Modélisation du problème

Caractéristiques

- ensemble des résultats élémentaires : $\Omega = \{1,2,\dots,6\}$
- on note X le gain ou la perte : $X = \{-2;1;5\}$

Modélisation du problème

Caractéristiques

- ensemble des résultats élémentaires : $\Omega = \{1,2,\ldots,6\}$
- on note X le gain ou la perte : $X = \{-2;1;5\}$

On associe à chaque événement élémentaire une valeur de X :

Modélisation du problème

Caractéristiques

- ensemble des résultats élémentaires : $\Omega = \{1,2,\ldots,6\}$
- on note X le gain ou la perte : $X = \{-2;1;5\}$

On associe à chaque événement élémentaire une valeur de X :

ω	1	2	3	4	5	6
x	-2	1	-2	1	-2	5

Modélisation du problème

Caractéristiques

- ensemble des résultats élémentaires : $\Omega = \{1,2,\ldots,6\}$
- on note X le gain ou la perte : $X = \{-2;1;5\}$

On associe à chaque événement élémentaire une valeur de X :

ω	1	2	3	4	5	6
x	-2	1	-2	1	-2	5

Définition d'une fonction $X \ : \ \Omega \to \mathbb{R} \ ; \ \omega \mapsto X(\omega)$
appelée Variable Aléatoire.

Synthèse

Tableau

$\omega \in \Omega$	1	2	3	4	5	6
$X(\omega) = x_i$	-2	1	-2	1	-2	5
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ou plus simplement,

$A \subset \Omega$	$\{1,3,5\}$	$\{2,4\}$	$\{6\}$
x_i	-2	1	5
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

La probabilité que X prenne une valeur donnée est égale à la probabilité de la réalisation de l'événement associé à cette valeur.

Loi de probabilité

A retenir !

Le tableau qui associe les valeurs de la variable aléatoire X à la probabilité de chacune de ces valeurs est la

loi de probabilité

de la variable aléatoire :

x_i	-2	1	5
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Loi de probabilité

A retenir !

Le tableau qui associe les valeurs de la variable aléatoire X à la probabilité de chacune de ces valeurs est la

loi de probabilité

de la variable aléatoire :

x_i	-2	1	5
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Rappel

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X est la fonction qui exprime la probabilité correspondant à chacune des valeurs que cette variable peut prendre.

Espérance mathématique

Jeu favorable ou non au joueur

Sur 6 parties, le joueur :

- perd 3 fois 2 €
- gagne 2 fois 1 €
- gagne 1 fois 5 €

Il gagne donc en moyenne : $\frac{3\times(-2)+2\times1+1\times5}{6} = \frac{1}{6}$ €

On appelle cette moyenne, **l'espérance** mathématique de la variable aléatoire X.

$$\boxed{\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

Jeu favorable ou non au joueur

Sur 6 parties, le joueur :

- perd 3 fois 2 €
- gagne 2 fois 1 €
- gagne 1 fois 5 €

Il gagne donc en moyenne : $\frac{3\times(-2)+2\times1+1\times5}{6}=\frac{1}{6}$ €

L'espérance du gain est positive, le jeu est donc favorable au joueur.

Propriétés de $\mathsf{E}(X)$

A retenir

- Si $\mathsf{E}(X) = 0$, on dit que la variable aléatoire X est **centrée**.
- Si une nouvelle variable aléatoire Y est définie par $Y = aX + b$, on admet que :

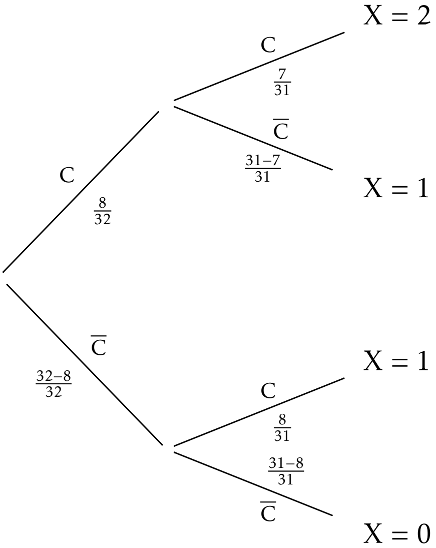
$$\boxed{\mathsf{E}(Y) = a\mathsf{E}(X) + b}$$

Exemple 1 - Espérance de gain

On tire au hasard deux cartes d'un jeu de 32 cartes (sans remise).
On considère la variable aléatoire X égale au nombre de cœurs parmi ces deux cartes (on rappelle qu'un quart des cartes sont des cœurs).

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Quelle est l'espérance de X ?

Situation en arbre



$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{23 \times 24}{31 \times 32} \\
&= \frac{69}{124}, \\
P(X=1) &= \frac{8 \times 24}{31 \times 32} + \frac{8 \times 24}{31 \times 32} \\
&= \frac{48}{124}, \\
P(X=2) &= \frac{7 \times 8}{31 \times 32} \\
&= \frac{7}{124}.
\end{aligned}$$

Solution

Loi de probabilité

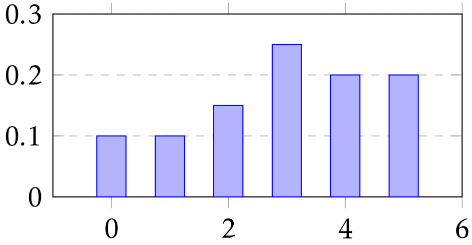
x_i	0	1	2
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{69}{124}$	$\frac{48}{124}$	$\frac{7}{124}$

Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0 \times \frac{69}{124} + 1 \times \frac{48}{124} + 2 \times \frac{7}{124} = \frac{1}{2}$$

En moyenne, un tel type de tirage amène une demi carte de coeur ...

Un professionnel vend des fauteuils. Sa commission est de 200 € par fauteuils vendu, et ses frais sont de 280 € par jour. Un étude statistique a montré que la variable aléatoire X qui indique le nombre x de fauteuils vendus par jour suit la loi représentée ci-après. On note Y la variable aléatoire donnant le gain journalier du vendeur.



Exemple 2 - Espérance de gain

1. La relation entre X et Y est : $Y = 200X - 280$
2. Le vendeur est en déficit à la fin de la journée lorsque :

$$Y < 0 \iff X < \frac{280}{200} = 1{,}4 \iff X = 0 \text{ ou } X = 1$$

3. La probabilité que le vendeur soit en déficit à la fin de la journée est :

$$P(Y < 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$$

4. Le vendeur peut espérer un gain moyen par jour de

$$\mathbf{E}(Y) = 200\mathbf{E}(X) - 280 = 200 \times 2{,}95 - 280 = 310€$$

Variance et écart-type

Variance V(X)

On appelle variance de X le nombre V(X) défini par :

$$V(X) = \sum (x - \mathbf{E}(X))^2 \cdot P(X = x)$$

Cette formule étant d'usage difficile, on lui préfère la suivante qui sera admise :

$$\boxed{V(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2}$$

Variance $V(X)$

On appelle variance de X le nombre $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum (x - \mathbf{E}(X))^2 \cdot P(X = x)$$

Cette formule étant d'usage difficile, on lui préfère la suivante qui sera admise :

$$\boxed{V(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2}$$

La variance mesure la dispersion des valeurs de X autour de l'espérance $\mathbf{E}(X)$. On dit que la variance mesure le risque.

Variance et écart-type

L'écart-type $\sigma(X)$

On appelle écart type de X le nombre noté σ_X ou $\sigma(X)$ égal à la racine carrée de la variance :

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{V(X)}}$$

L'écart-type $\sigma(X)$

On appelle écart type de X le nombre noté σ_X ou $\sigma(X)$ égal à la racine carrée de la variance :

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{V(X)}}$$

1. A la différence de la variance, l'écart type et les valeurs de X ont le même ordre de grandeur.
2. Répartition des notes d'une classe : plus l'écart type est faible, plus la classe est homogène (la note des élèves est proche de la moyenne).

Propriétés

A retenir

- Quand l'espérance de X est nulle et que l'écart type est égal à 1, on dit que la variable aléatoire X est **centrée et réduite.**
- Si une nouvelle variable aléatoire Y est définie par $Y = aX + b$, on admet que :

$$\boxed{V(Y) = a^2 V(X)}$$

- Si X est une variable aléatoire d'expérance mathématique $\mathbf{E}(X) = \mu$ et d'écart type non nul σ, alors la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est centrée et réduite.

Exemple - Comparaison de 2 loteries

Deux loteries sont organisées le jour de la fête du village. Pour chacune sont mis en vente cent billets à 4 €.

1. La loterie organisée par le bourgmestre offre un lot de 200 € et dix lots de 5 €.
2. Celle organisée par le club sportif offre deux lots de 50 €, dix lots de 10 € et dix lots de 5 €.

Comparons ces deux loteries.

Exemple - Comparaison de 2 loteries

Deux loteries sont organisées le jour de la fête du village. Pour chacune sont mis en vente cent billets à 4 €.

1. La loterie organisée par le bourgmestre offre un lot de 200 € et dix lots de 5 €.
2. Celle organisée par le club sportif offre deux lots de 50 €, dix lots de 10 € et dix lots de 5 €.

Comparons ces deux loteries.

- deux loteries notées Lb et Lc
- Lb : 11 billets gagnants $\leftrightarrow$ Lc : 22 billets gagnants
- deux fois plus de chance de gagner avec Lc
- gain 4 fois plus élevé avec Lb

Exemple - Comparaison de 2 loteries

On appelle X_b (X_c) le gain du joueur à la loterie Lb (Lc).

Loi de probabilité de X_b

x_i	0	5	200
$P(X_b = x_i)$	$\frac{89}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{100}$

Espérance : $\mathsf{E}(X_b) = 200 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{10}{100} + 0 \times \frac{89}{100} = 2{,}5€$

Loi de probabilité de X_c

x_i	0	5	10	50
$P(X_c = x_i)$	$\frac{78}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{2}{100}$

$$\mathsf{E}(X_c) = 50 \times \frac{2}{100} + 10 \times \frac{10}{100} + 5 \times \frac{10}{100} + 0 \times \frac{78}{100} = 2{,}5€$$

Conclusions

- On obtient le même montant
- Cette espérance mathématique correspond au gain moyen par billet si on achetait tous les billets.
- Le prix de vente d'un billet étant de 4 €, la perte moyenne est donc de 1,5 €.

Conclusions

- On obtient le même montant
- Cette espérance mathématique correspond au gain moyen par billet si on achetait tous les billets.
- Le prix de vente d'un billet étant de 4 €, la perte moyenne est donc de 1,5 €.

Pour différencier ces deux loteries, il faut s'intéresser aux écarts par rapport à l'espérance.

Ecarts par rapport à l'espérance

Variances $\rightarrowtail V_B$ et V_C

- $V_B = (200-2{,}5)^2\ \dfrac{1}{100} + (5-2{,}5)^2\ \dfrac{10}{100} + (0-2{,}5)^2\ \dfrac{89}{100} = 321{,}25€^2$
- $V_C = (50-2{,}5)^2\dfrac{2}{100} + (10-2{,}5)^2\ \dfrac{10}{100} + (5-2{,}5)^2\ \dfrac{10}{100} + (0-2{,}5)^2\ \dfrac{78}{100} = 56{,}25€^2$

Ecarts par rapport à l'espérance

Variances $\rightarrowtail$ V_B et V_C

- $$V_B = (200-2{,}5)^2\,\frac{1}{100} + (5-2{,}5)^2\,\frac{10}{100} + (0-2{,}5)^2\,\frac{89}{100} = 321{,}25€^2$$
- $$V_C = (50-2{,}5)^2\,\frac{2}{100} + (10-2{,}5)^2\,\frac{10}{100} + (5-2{,}5)^2\,\frac{10}{100} + (0-2{,}5)^2\,\frac{78}{100} = 56{,}25€^2$$

en euros $\rightarrowtail$ écarts-types

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_B = 17{,}93€ \\ \sigma_C = 7{,}50€\end{array}\right\}$$

Gains plus dispersés autour de $E(X_b)$ que de $E(X_c)$

Conclusions

- L'écart-type est un outil qui donne une mesure de la dispersion autour de l'espérance mathématique, ce qui peut être utile dans des situations plus complexes que celle-ci.
- Finalement, que désire-t-on : gagner plus d'argent ou perdre le moins souvent possible ?

Si on aime le risque, on choisira Lb, sinon on préférera Lc.