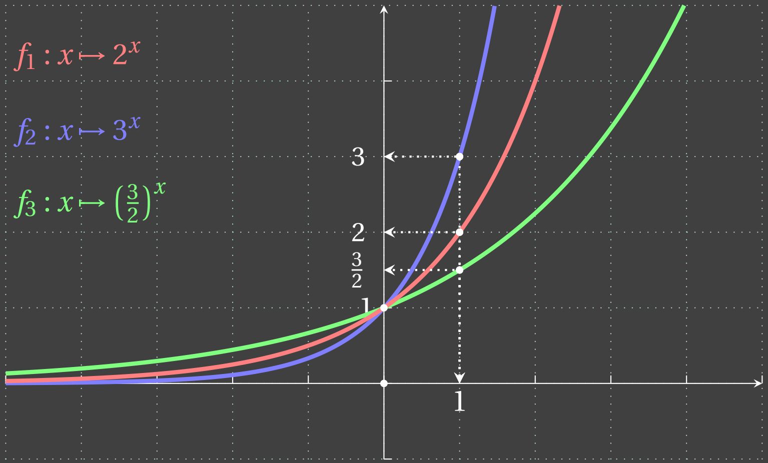
Fonctions exponentielles et logarithmes

Limites et dérivées

F. Lancereau

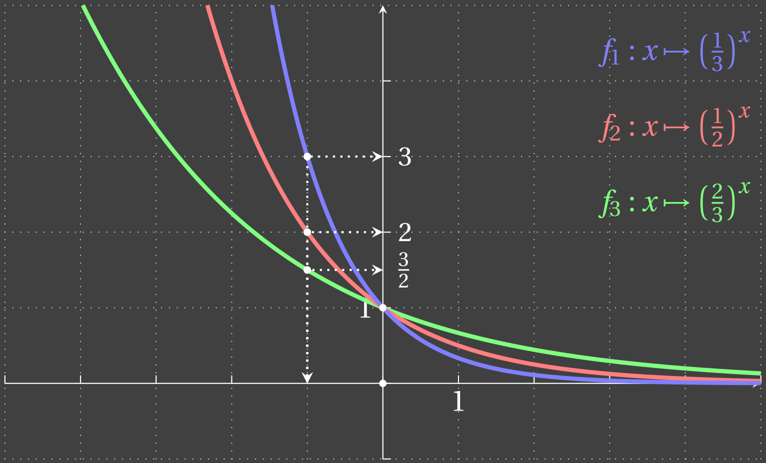
16 janvier 2025

Graphes



$f_1 : x \longmapsto 2^x$
$f_2 : x \longmapsto 3^x$
$f_3 : x \longmapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$
3
2
$\frac{3}{2}$
1
1

Graphes


$f_1 : x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$
$f_2 : x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$f_3 : x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$
3
2
$\frac{3}{2}$
1
1

Base de la fonction exponentielle

On rappelle (encore une fois) les raisons pour lesquelles il faut que la base a de l'exponentielle soit un nombre réel strictement positif et différent de 1 ?

- si a était négatif, certaines puissances de a n'existeraient pas :

$$f(x) = (-2)^x \text{ n'est pas définie en } x = 1/2$$

- si $a = 0$, la fonction $f(x) = 0^x$ ne présente aucun intérêt (elle n'est définie que pour des réels strictement positifs et elle vaut alors toujours 0)
- si $a = 1$ alors f n'est autre que la fonction constante.

Rappel : fonction dérivée première

Définition en terme de limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
\left(x^2\right)' &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh - h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 2x - h \\
&= 2x
\end{aligned}$$

Dérivée de la fonction exponentielle

Définition en terme de limite

$$\begin{aligned}
\exp_a'(x) = \left(a^x\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(a^h - 1\right) \cdot a^x}{h} \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}\right) \cdot a^x \\
&= \exp_a'(0) \cdot a^x
\end{aligned}$$

Pente à l'origine

La constante multiplicative

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

est la pente de la tangente au graphe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0. En effet :

$$\exp_a'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \cdot a^0 = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Approche expérimentale

Approximation de la pente à l'origine $\exp'_{2/3}(0)$

$$\text{approximation de } \exp'_{2/3}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^h - 1}{h} \qquad \left(\overset{\text{FI}}{=} \left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

h	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^h-1}{h}$	−0,333 333	−0,397 355	−0,404 644	−0,405 383	−0,405 457

d'où $\exp'_{2/3}(0) \approx -0{,}405\,457$

Approche expérimentale

Approximation de la pente à l'origine $\exp'_{3/2}(0)$

$$\text{approximation de } \exp'_{3/2}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^h - 1}{h} \qquad \left(\overset{\text{FI}}{=} \left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

h	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^h-1}{h}$	0,5	0,413 797	0,406 288	0,405 547	0,405 473

d'où $\exp'_{3/2}(0) \approx 0{,}405\,473$

Approche expérimentale

Approximation de la pente à l'origine $\exp_2'(0)$

approximation de $\exp_2'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h} \quad \left(\overset{\text{FI}}{=} \left[\dfrac{0}{0} \right] \right)$

h	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$\frac{2^h-1}{h}$	1	0,717 735	0,695 555	0,693 387	0,693 171

d'où $\exp_2'(0) \approx 0{,}693\ 171$

Approche expérimentale

Approximation de la pente à l'origine $\exp'_{2,7}(0)$

approximation de $\exp'_{2,7}(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2,7^h - 1}{h} \quad \left(\overset{\text{FI}}{=} \left[\dfrac{0}{0}\right]\right)$

h	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$\frac{2,7^h-1}{h}$	1,7	1,044 254	0,998 201	0,993 745	0,993 301

d'où $\exp'_{2,7}(0) \approx 0{,}993\,301$

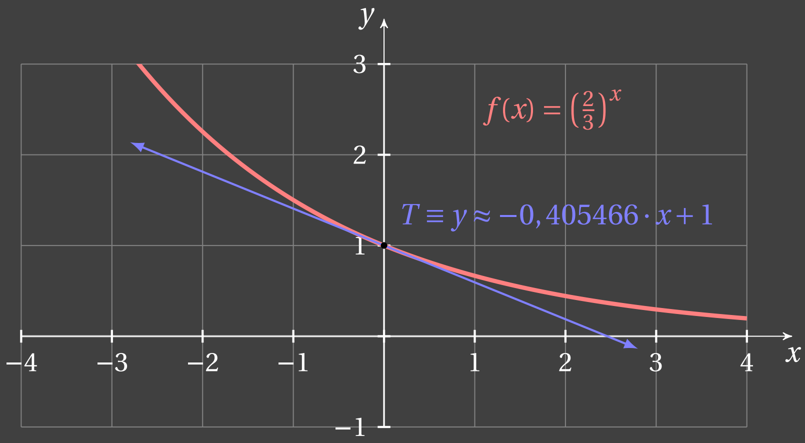
Approche expérimentale

Approximation de la pente à l'origine $\exp'_{2,8}(0)$

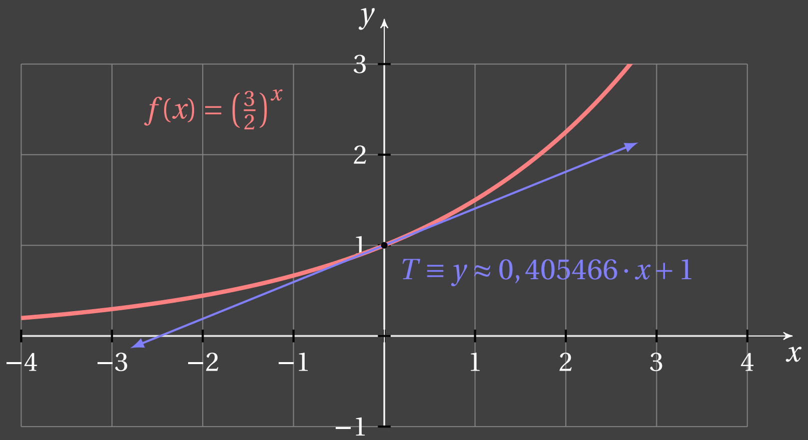
approximation de $\exp'_{2,8}(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2,8^h - 1}{h} \quad \left(\overset{\text{FI}}{=} \left[\dfrac{0}{0} \right] \right)$

h	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$\frac{2,8^h-1}{h}$	1,8	1,084 492	1,034 938	1,030 15	1,029 672

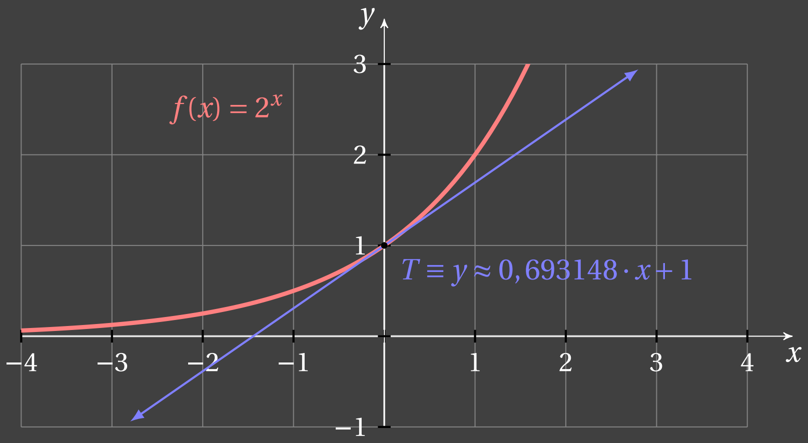
d'où $\exp'_{2,8}(0) \approx 1{,}029\,672$



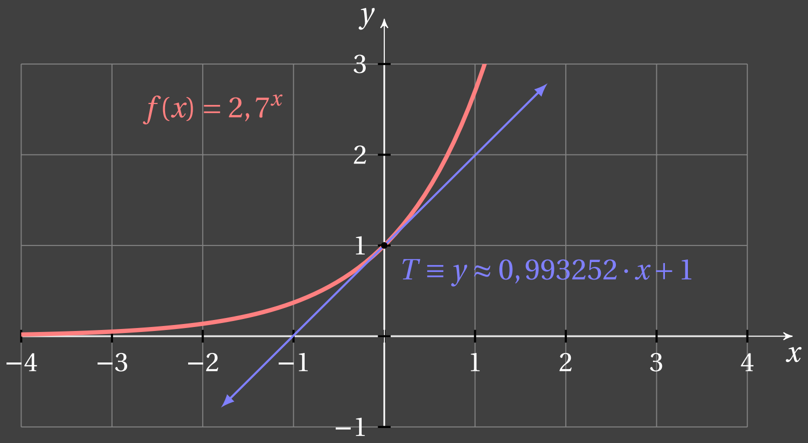
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^h - 1}{h} \approx -0,405466$$



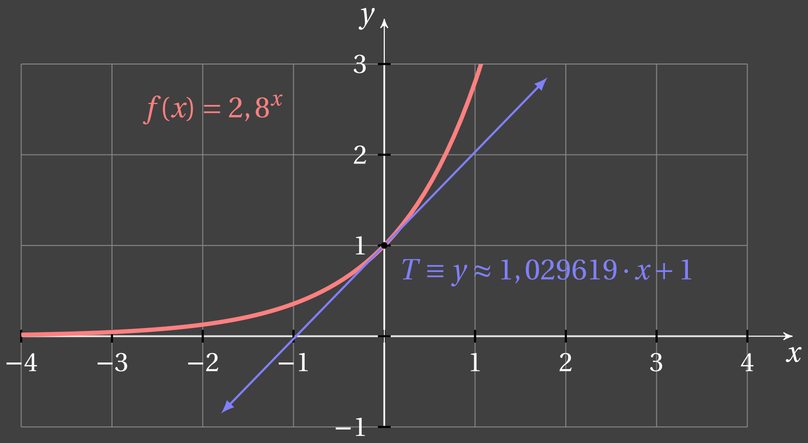
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^h - 1}{h} \approx 0,405466$$



$$m = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0,693148$$



$$m = \lim_{h \to 0} \frac{2,7^h - 1}{h} \approx 0,993252$$



$$m = \lim_{h \to 0} \frac{2,8^h - 1}{h} \approx 1,029619$$

La fonction exponentielle népérienne

La seule fonction qui vérifie $f' = f$ $\rightleftarrows$ $\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x \iff \exp'_{\mathbf{e}}(0) = 1$

La fonction exponentielle népérienne

La seule fonction qui vérifie $f' = f$ $\quad \rightleftarrows \quad$ $\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x \iff \exp'_{\mathbf{e}}(0) = 1$

$$
\begin{aligned}
\exp'_{\mathbf{e}}(0) = 1 &\iff \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{e}^h - 1}{h} = 1 \\
&\iff \frac{\mathbf{e}^h - 1}{h} \approx 1 \quad \text{quand } h \approx 0 \\
&\iff \mathbf{e}^h - 1 \approx h \\
&\iff \mathbf{e}^h \approx 1 + h \\
&\iff \mathbf{e} \approx (1 + h)^{\frac{1}{h}}
\end{aligned}
$$

La fonction exponentielle népérienne

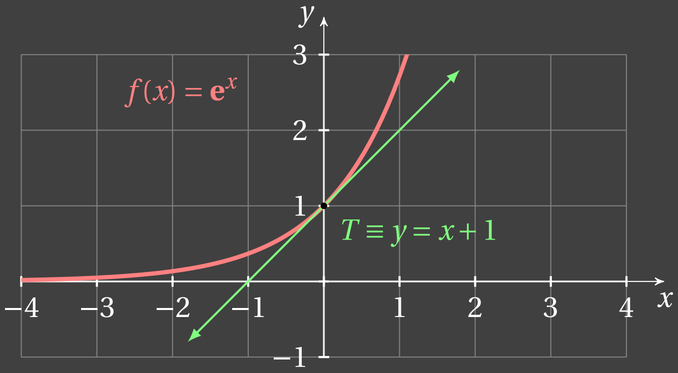
La seule fonction qui vérifie $f' = f$ $\rightleftarrows$ $(\mathbf{e}^x)' = \mathbf{e}^x \iff \exp'_{\mathbf{e}}(0) = 1$

$$\begin{aligned}
\exp'_{\mathbf{e}}(0) = 1 &\iff \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{e}^h - 1}{h} = 1 \\
&\iff \frac{\mathbf{e}^h - 1}{h} \approx 1 \quad \text{quand } h \approx 0 \\
&\iff \mathbf{e}^h - 1 \approx h \\
&\iff \mathbf{e}^h \approx 1 + h \\
&\iff \mathbf{e} \approx (1+h)^{\frac{1}{h}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{e} = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \quad \text{ou bien} \quad \mathbf{e} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \quad (\text{poser } n = 1/h)$$

La fonction exponentielle népérienne

Nombre d'Euler $\quad 2,7 < \mathbf{e} \approx 2,71828 < 2,8$



$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{e}^h - 1}{h} = 1 \implies \mathbf{e} = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

Applications

Nombre d'Euler

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 = \mathbf{e}^3$$

Domaines de fonctions

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}}$

□ CE : $1-\mathbf{e}^{2x} \geq 0 \iff 1 \geq \mathbf{e}^{2x} \iff \mathbf{e}^0 \geq \mathbf{e}^{2x} \iff 0 \geq 2x \iff x \leq 0$

$$\mathbf{dom}\, f = \mathbb{R}^-$$

Applications

Dérivée

- $\left(\mathbf{e}^{-x^2}\right)' = \mathbf{e}^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2x \cdot \mathbf{e}^{-x^2} \quad \rightleftarrows \quad$ variations de fonction

Limites

- $\lim\limits_{x\to -1^-} (x+1)\cdot \mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} = 0 \cdot \mathbf{e}^{\frac{1}{0^-}} = 0 \cdot \mathbf{e}^{-\infty} = 0 \implies$ Point creux à gauche en $(-1,0)$.

- $$\lim_{x\to -1^+} (x+1)\cdot \mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} = [0\cdot(+\infty)] = \lim_{x\to -1^+} \frac{\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}}{\frac{1}{x+1}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to -1^+} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2}\cdot \mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$
$$= \lim_{x\to -1^+} \mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} = +\infty \quad \implies \quad AV_d \equiv x = -1$$

Le logarithme népérien

Pour tout réel x *strictement positif* :

- Logarithme **népérien** : $y = \ln(x) \iff x = \mathbf{e}^y$
  1. Pour tout réel $x > 0$: $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$
  2. Pour tout réel x : $\ln(\mathrm{e}^x) = x$
  3. $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$
  4. $a^x = \mathbf{e}^{x \ln a}$
- Dérivée de a^x : $\left(a^x\right)' = \left(\mathbf{e}^{x \cdot \ln a}\right)' = \mathbf{e}^{x \cdot \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' = \ln(a) \cdot \mathbf{e}^{x \cdot \ln a} = \ln(a) \cdot a^x$

Conclusion : $\exp_a'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a)$

Graphes