Les logarithmes

F. Lancereau

8 janvier 2025

Définition des Logarithmes

Le logarithme de base a d'un nombre réel strictement positif x, noté $\log_a(x)$, est l'exposant auquel il faut élever a pour obtenir x.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\log_a \bullet"] & \log_a(x) \arrow[l, bend left, "a^{\bullet}"] \end{tikzcd}$$

Exemple

$$\log_5(125) = 3 \text{ car } 5^3 = 125$$

Logarithme décimal

Le logarithme décimal d'un nombre réel strictement positif x, noté $\log(x)$, est l'exposant auquel il faut élever 10 pour obtenir x.

Note : *Pour un logarithme de base 10, on omet la base et on écrit uniquement log*

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\log \bullet"] & \log(x) \arrow[l, bend left, "10^{\bullet}"] \end{tikzcd}$$

Exemple

$$\log(0,001) = -3 \text{ car } 10^{-3} = 0,001$$

Forme logarithmique

Passage de la forme exponentielle à la forme logarithmique :

$$x = a^y \iff y = \log_a(x) \quad \text{avec} \quad \boxed{x \in \mathbb{R}_0^+}$$

Exemple

$$64 = 2^6 \iff 6 = \log_2 64$$

se lit : *"six est le logarithme en base deux de soixante-quatre"*

Les logarithmes

$$\begin{aligned} \text{pour tout } x \in \mathbb{R} &\quad : \quad \log_a(a^x) = x \\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_0^+ &\quad : \quad a^{\log_a(x)} = x \end{aligned}$$

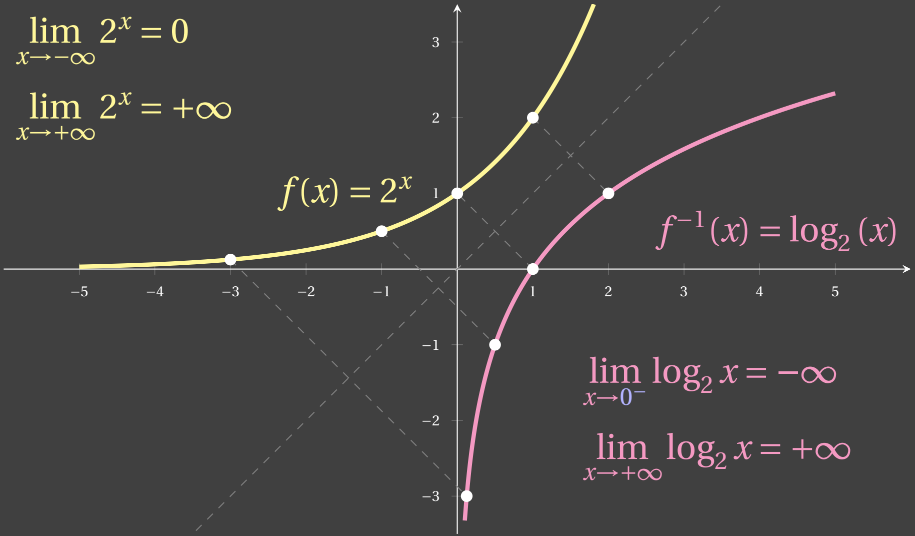
Exemples

- $\log_2(8) = \log_2\left(2^3\right) = 3$
- $\log_{\frac{1}{2}}(8) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right) = -3$
- $3^{\log_3(2)} = 2$
- $3^{\log_3(-2)} \neq -2$ car $-2 \notin \textbf{dom} \log_a$

Représentation graphique

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$$

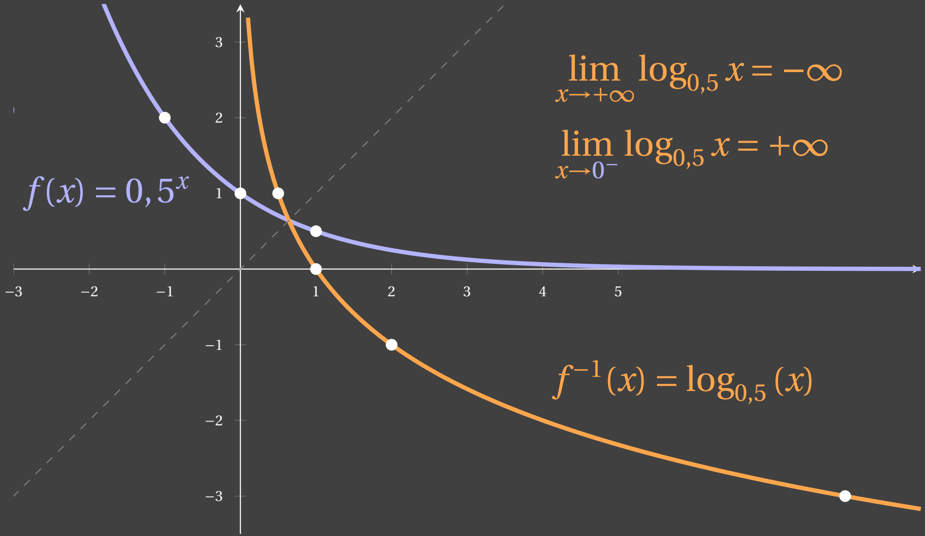
$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$$



$$\lim_{x \to 0^-} \log_2 x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty$$

Représentation graphique (Fonction décroissante)



La fonction logarithme

À retenir !

Pour n'importe quelle base $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

$$\log_a :]0;+\infty[\to \mathbb{R} ; x \mapsto \log_a x$$

$$\textbf{dom}\left(\log_a\right) = \mathbb{R}_0^+ \quad \text{et} \quad \textbf{im}\left(\log_a\right) = \mathbb{R}$$

Propriétés des logarithmes

Valeurs particulières des logarithmes : $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$

À retenir !

1. $\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$
2. $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
3. $\log_a (x^m) = m \cdot \log_a x$
4. $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$

Les logarithmes

Application

$$\log_3(9x) = \log_3 9 + \log_3 x$$

Les logarithmes

Application

$$\begin{aligned}\log_3(9x) &= \log_3 9 + \log_3 x \\ &= \log_3\left(3^2\right) + \log_3 x\end{aligned}$$

Les logarithmes

Application

$$\begin{aligned}\log_3(9x) &= \log_3 9 + \log_3 x \\ &= \log_3\left(3^2\right) + \log_3 x \\ &= 2 + \log_3 x\end{aligned}$$

Démonstration $\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$

1. on pose : $\begin{cases} M = \log_a m & \Longrightarrow \quad m = a^M \\ N = \log_a n & \Longrightarrow \quad n = a^N \end{cases}$

Démonstration $\log_a(m\cdot n)=\log_a m+\log_a n$

1. on pose : $\begin{cases} M=\log_a m & \Longrightarrow\ m=a^M \\ N=\log_a n & \Longrightarrow\ n=a^N \end{cases}$
2. calcul du produit : $m\cdot n=a^M\cdot a^N=a^{M+N}$

Démonstration $\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$

1. on pose : $\begin{cases} M = \log_a m & \Longrightarrow \quad m = a^M \\ N = \log_a n & \Longrightarrow \quad n = a^N \end{cases}$
2. calcul du produit : $m \cdot n = a^M \cdot a^N = a^{M+N}$
3. passage au logarithme :

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a\left(a^{M+N}\right) = M + N = \log_a m + \log_a n$$

CQFD

Changement de base des logarithmes

A retenir !

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Changement de base des logarithmes

A retenir !

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Exemples

- $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln(10)} \approx 0,4343 \times \ln x$

Changement de base des logarithmes

A retenir !

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Exemples

- $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln(10)} \approx 0,4343 \times \ln x$
- $\log_2 100 = \dfrac{\log(100)}{\log(2)} = \dfrac{2}{\log 2} \approx \dfrac{2}{0,30103} \approx 6,643856$

Démonstration

On pose : $\log_a x = L \iff x = a^L$

Démonstration

On pose : $\log_a x = L \iff x = a^L$

$$\log_b x = \log_b\left(a^L\right) \iff \log_b x = L\,\log_b a$$

Démonstration

On pose : $\log_a x = L \iff x = a^L$

$$\log_b x = \log_b \left(a^L\right) \iff \log_b x = L \log_b a$$

$$\iff L = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Démonstration

On pose : $\log_a x = L \iff x = a^L$

$$\log_b x = \log_b\left(a^L\right) \iff \log_b x = L \log_b a$$

$$\iff L = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Conclusion : $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$