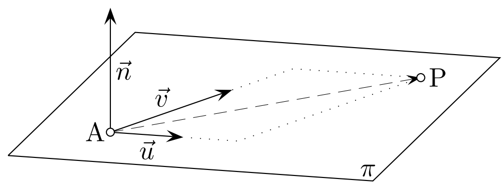
4 Le plan et la droite dans l'espace

Dans un repère de l'espace, on considère un point $\mathrm{A}(a_1\,;a_2\,;a_3)$ et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.
On appelle π le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Équation paramétrique du plan

Pour tout point $\mathrm{P}(x\,;y\,;z)$ de l'espace, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Le point P appartient au plan π.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
3) Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$,
c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,u_1 \\ \lambda\,u_2 \\ \lambda\,u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu\,v_1 \\ \mu\,v_2 \\ \mu\,v_3 \end{pmatrix}$.
4) $\boxed{\begin{cases} x = a_1 + \lambda\,u_1 + \mu\,v_1 \\ y = a_2 + \lambda\,u_2 + \mu\,v_2 \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = a_3 + \lambda\,u_3 + \mu\,v_3 \end{cases}}$

Cette formule constitue l'**équation paramétrique** du plan π.

Équation cartésienne du plan

Pour tout point $\mathrm{P}(x\,;y\,;z)$ de l'espace, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Le point P appartient au plan π.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
3) $\begin{vmatrix} x-a_1 & u_1 & v_1 \\ y-a_2 & u_2 & v_2 \\ z-a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$.
4) Avec $a = u_2\,v_3 - u_3\,v_2$, $b = u_3\,v_1 - u_1\,v_3$, $c = u_1\,v_2 - u_2\,v_1$ et
$d = -a_1\,(u_2\,v_3 - u_3\,v_2) - a_2\,(u_3\,v_1 - u_1\,v_3) - a_3\,(u_1\,v_2 - u_2\,v_1)$:
$\boxed{a\,x + b\,y + c\,z + d = 0}$

Cette expression s'appelle l'**équation cartésienne** du plan π.

Équation cartésienne du plan sous forme normale

Dans un repère orthonormé de l'espace, considérons un plan π défini par un point $\mathrm{A}(a_1\,;a_2\,;a_3)$ et un vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Pour tout point $\mathrm{P}(x\,;y\,;z)$ de l'espace, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Le point P appartient au plan π.
2) $\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$
3) $0 = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} = a\,(x - a_1) + b\,(y - a_2) + c\,(z - a_3)$
4) $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ avec $d = -a_1\,a - a_2\,b - a_3\,c$

Rappel : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs d'un plan, le produit vectoriel $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2\,v_3 - u_3\,v_2 \\ u_3\,v_1 - u_1\,v_3 \\ u_1\,v_2 - u_2\,v_1 \end{pmatrix}$ fournit un vecteur orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4.1 Trouver une équation paramétrique et une équation cartésienne du plan :

1) qui passe par $\mathrm{A}(1\,;-2\,;3)$ et admet pour vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$;
2) qui passe par $\mathrm{A}(-6\,;3\,;-2)$, $\mathrm{B}(5\,;2\,;1)$ et $\mathrm{C}(2\,;5\,;2)$;
3) qui passe par $\mathrm{A}(-1\,;-4\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$;
4) qui passe par $\mathrm{A}(-3\,;5\,;-4)$ et est parallèle au plan de 2) ;
5) qui passe par $\mathrm{A}(3\,;1\,;1)$ et est perpendiculaire à la droite BC avec $\mathrm{B}(1\,;0\,;5)$ et $\mathrm{C}(3\,;-3\,;8)$.
6) qui passe par $\mathrm{A}(7\,;-4\,;6)$ et est parallèle au plan $\mathrm{O}xz$;
7) qui passe par l'origine et est perpendiculaire à chacun des plans d'équations respectives $3\,x - 2\,y + 5\,z - 17 = 0$ et $x - y - z + 3 = 0$;
8) qui passe par $\mathrm{A}(2\,;5\,;1)$ et par $\mathrm{B}(-1\,;7\,;0)$ et qui est parallèle au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
9) qui passe par l'origine et le point $\mathrm{A}(1\,;1\,;1)$ et qui est perpendiculaire au plan d'équation $x - y + z = 0$.

4.2 On donne les six points A$(1\,;4\,;1)$, B$(-2\,;-8\,;3)$, C$(-5\,;-11\,;5)$, P$(3\,;5\,;-1)$, Q$(3\,;-11\,;-1)$ et R$(0\,;-3\,;1)$. Montrer que les plans ABC et PQR sont parallèles.

4.3 On donne les points O$(0\,;0\,;0)$, A$(1\,;0\,;0)$, B$(0\,;1\,;0)$ et C$(0\,;0\,;1)$. Soient α le plan passant par A et parallèle au plan OBC, β le plan passant par B et parallèle au plan OAC et γ le plan passant par C et parallèle au plan OAB.

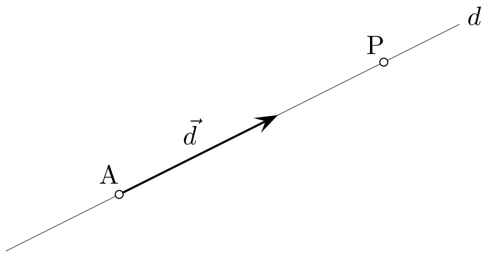
1) Déterminer les coordonnées du point d'intersection P des trois plans α, β et γ.
2) Le point P appartient-il au plan ABC ?

4.4 On donne les équations de deux plans ; déterminer si ces plans sont sécants, strictement parallèles ou confondus :

1) $6\,x-4\,y+5\,z+6=0$ $\qquad$ $-12\,x+8\,y-10\,z-9=0$
2) $2\,x-8\,y+4\,z-7=0$ $\qquad$ $x-4\,y-z+3=0$
3) $-x+5\,y-3\,z+45=0$ $\qquad$ $x-5\,y+3\,z-45=0$
4) $3\,x-8=0$ $\qquad$ $x+3=0$
5) $3\,x-2\,y+5\,z-4=0$ $\qquad$ $\begin{cases} x=4+2\,\lambda+5\,\mu \\ y=2+3\,\lambda \\ z=-3\,\mu \end{cases},\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$
6) $\begin{cases} x=1+6\,\lambda-2\,\mu \\ y=2-2\,\lambda+2\,\mu \\ z=3+2\,\lambda-\mu \end{cases},\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $\begin{cases} x=1+3\,\lambda-2\,\mu \\ y=2-\lambda+\mu \\ z=3+\lambda-\mu \end{cases},\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

4.5 Calculer les coordonnées du point d'intersection des plans $x-2\,y+z-7=0$, $2\,x+y-z+2=0$ et $x-3\,y+2\,z-11=0$.

Dans un repère de l'espace, on considère un point A$(a_1\,;a_2\,;a_3)$ et un vecteur non nul $\vec{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$. On appelle d la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$.



Équation paramétrique de la droite

Pour tout point P$(x\,;y\,;z)$ de l'espace, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Le point P appartient à la droite d.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires.
3) Il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AP}=\lambda\,\vec{d}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda\,d_1 \\ \lambda\,d_2 \\ \lambda\,d_3 \end{pmatrix}$.

4) $$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + \lambda\, d_1 \\ y = a_2 + \lambda\, d_2 \\ z = a_3 + \lambda\, d_3 \end{cases} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Cette formule constitue l'**équation paramétrique** de la droite d.

Équations cartésiennes de la droite

Les équations cartésiennes de la droite s'obtiennent en éliminant le paramètre.

L'équation paramétrique équivaut à $\begin{cases} x - a_1 = \lambda\, d_1 \\ y - a_2 = \lambda\, d_2 \\ z - a_3 = \lambda\, d_3 \end{cases}$

Si $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ et $d_3 \neq 0$, ce système revient à $\begin{cases} \dfrac{x - a_1}{d_1} = \lambda \\ \dfrac{y - a_2}{d_2} = \lambda \\ \dfrac{z - a_3}{d_3} = \lambda \end{cases}$ d'où suivent

les **équations cartésiennes** de la droite : $\boxed{\dfrac{x - a_1}{d_1} = \dfrac{y - a_2}{d_2} = \dfrac{z - a_3}{d_3}}$.

Si $d_1 = 0$, alors on obtient l'équation cartésienne $x - a_1 = 0$;
si $d_2 = 0$, alors on trouve l'équation cartésienne $y - a_2 = 0$;
si $d_3 = 0$, alors on a l'équation cartésienne $z - a_3 = 0$.

Les équations cartésiennes d'une droite, système indéterminé de deux équations à trois inconnues, la caractérisent comme l'intersection de deux plans.

4.6 Déterminer l'équation paramétrique et les équations cartésiennes de la droite :

1) qui passe par $\mathrm{A}(1\,;2\,;3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
2) qui passe par $\mathrm{A}(2\,;3\,;5)$ et $\mathrm{B}(1\,;5\,;7)$;
3) qui passe par $\mathrm{A}(8\,;6\,;-12)$ et est parallèle au segment BC où $\mathrm{B}(4\,;0\,;-2)$ et $\mathrm{C}(5\,;-2\,;3)$;
4) qui passe par $\mathrm{A}(2\,;3\,;5)$ et est perpendiculaire au plan $3\,x - 2\,y + z = 0$;
5) qui passe par l'origine et est perpendiculaire au plan $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda - 3\mu \\ y = -1 + 3\lambda - \mu \\ z = 2 + 5\lambda - \mu \end{cases}$;
6) qui passe par $\mathrm{A}(-8\,;10\,;-12)$ et est perpendiculaire au plan $z + 4 = 0$;
7) qui passe par $\mathrm{A}(1\,;0\,;3)$ et est orthogonale aux droites g et h :
$(g) : \begin{cases} x = 1 + 2\,\lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 3 + 2\,\lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad (h) : \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 2 + 3\,\mu \\ z = \quad + \mu \end{cases} , \quad \mu \in \mathbb{R}$;
8) qui passe par $\mathrm{A}(8\,;-4\,;2)$ et qui est parallèle à l'intersection des plans $3\,x - y + z = 0$ et $x - y + z = 0$.

4.7 On donne une droite d par son équation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - 5\,\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 3\,\lambda \end{cases}$.

Déterminer le point de la droite d :

1) qui a une abscisse égale à 12 ;
2) qui a une ordonnée égale à 5 ;
3) qui a une cote égale à -2 ;
4) dont l'abscisse et la cote sont égales ;
5) dont la cote est égale au double de l'ordonnée.

4.8 Déterminer l'équation paramétrique de la droite d qui passe par le point $A(4\,;-7\,;5)$ et qui rencontre les droites d_1 et d_2 avec :

$(d_1) : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\,\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ et $(d_2) : \begin{cases} x = 4 + 3\,\mu \\ y = 3 + \mu \\ z = 3 + 2\,\mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$.

4.9 On donne deux droites. Indiquer si ces droites sont sécantes, strictement parallèles, confondues ou gauches.

1) $\begin{cases} x = 1 + 3\,\lambda \\ y = -2 - 5\,\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \begin{cases} x = -2 - 6\,\mu \\ y = 3 + 10\,\mu \\ z = 4 - 2\,\mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} x = 2 - 5\,\lambda \\ y = 3 + 2\,\lambda \\ z = 5 - 4\,\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \begin{cases} x = 2 - 5\,\mu \\ y = 3 - 2\,\mu \\ z = 5 - 4\,\mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$

3) $\begin{cases} x = 7 + 2\,\lambda \\ y = 5 - 6\,\lambda \\ z = 3 + 3\,\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \begin{cases} x = 6 + 4\,\mu \\ y = -1 - 12\,\mu \\ z = 5 - 5\,\mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} x = 2 + 5\,\lambda \\ y = 3 + 4\,\lambda \\ z = 1 + 5\,\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-1}{6}$

5) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2\,y + z = 5 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x + 3\,y + z = 9 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + 2\,y - 5 = 0 \\ 3\,y + z - 4 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x + 2\,y - 3 = 0 \\ 3\,y + z - 1 = 0 \end{cases}$

4.10 Montrer que la droite $\begin{cases} x = -2 + 3\,\lambda \\ y = 1 - 4\,\lambda \\ z = -5 + 4\,\lambda \end{cases}$ est parallèle au plan $4\,x - 3\,y - 6\,z = 5$.

4.11 Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par le point $P(4\,;2\,;1)$ et contenant la droite $(d) : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 3\,\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

4.12 On donne une droite d et un plan π. La droite d est-elle disjointe de π, incluse dans π ou coupe-t-elle π ?

1) $(d) : \begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda \\ y = 5 - 2\,\lambda \\ z = 3 + 2\,\lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad (\pi) : 2\,x + y - z = 0$

2) $(d) : \begin{cases} x - 2\,y + z = 4 \\ x + 3\,y - 2\,z = 0 \end{cases}$ $\qquad (\pi) : 3\,x - 2\,y + 4\,z = 0$

3) $(d) : \begin{cases} x = 2 - 3\,\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad (\pi) : 4\,x + y - 11\,z = 0$

4) $(d) : \begin{cases} x + y - 3\,z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ $\qquad (\pi) : \begin{cases} x = 5 - \lambda + 2\,\mu \\ y = 10 + \lambda - 3\,\mu \\ z = 5 + \lambda - \mu \end{cases} , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

4.13 Déterminer le point d'intersection de la droite d et du plan π donnés par leurs équations respectives.

1) $(d) : \begin{cases} x = -4 - 5\,\lambda \\ y = 8 + 6\,\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad (\pi) : 2\,x + 3\,y - z - 5 = 0$

2) $(d) : \begin{cases} x = 4 + 3\,\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad (\pi) : \begin{cases} x = 3 + 3\,\mu - \nu \\ y = -2 - 5\,\mu + \nu \\ z = 7 + 3\,\mu - \nu \end{cases} , \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}$

4.14 On donne deux droites d_1 et d_2. Montrer qu'elles se coupent en un point P et donner l'équation cartésienne du plan π qu'elles déterminent.

1) $(d_1) : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad (d_2) : \begin{cases} x = 5 + 2\,\mu \\ y = 9 + 4\,\mu \\ z = 7 + 2\mu \end{cases} , \quad \mu \in \mathbb{R}$

2) $(d_1) : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ $\qquad (d_2) : \begin{cases} 3\,x - 2\,y + 7\,z = -32 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

4.15 On considère les points O$(0\,;0\,;0)$, A$(3\,;0\,;0)$, B$(0\,;3\,;0)$, C$(0\,;0\,;3)$ et D$(1\,;2\,;3)$. Déterminer l'image de D par la symétrie de direction OC par rapport au plan ABC.

4.16 On donne trois droites d, f et g :

$(d) : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 3\,\lambda \\ z = 1 \end{cases}$ $\qquad (f) : \begin{cases} x = -1 \\ y = 7 + 2\,\mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$ $\qquad (g) : \begin{cases} x = \nu \\ y = 4 \\ z = 3 - 2\,\nu \end{cases}$

Trouver un point A de d, un point B de f et un point C de g tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Déterminer une équation paramétrique de la droite AB.

Réponses

4.1

1) $\begin{cases} x = 1 + 5\,\mu \\ y = -2 - \lambda + 8\,\mu \\ z = 3 + \lambda - 3\,\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\qquad x - y - z = 0$

2) $\begin{cases} x = -6 + 11\,\lambda + 4\,\mu \\ y = 3 - \lambda + \mu \\ z = -2 + 3\,\lambda + 2\,\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\qquad x + 2\,y - 3\,z - 6 = 0$

3) $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -4 + 5\,\mu \\ z = 1 - \lambda + 2\,\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\qquad 5\,x - 2\,y + 5\,z - 8 = 0$

4) $\begin{cases} x = -3 + 11\,\lambda + 4\,\mu \\ y = 5 - \lambda + \mu \\ z = -4 + 3\,\lambda + 2\,\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\qquad x + 2\,y - 3\,z - 19 = 0$

5) $\begin{cases} x = 3 + 3\,\mu \\ y = 1 + \lambda + 2\,\mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\qquad 2\,x - 3\,y + 3\,z - 6 = 0$

6) $\begin{cases} x = 7 + \lambda \\ y = -4 \\ z = 6 + \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\qquad y + 4 = 0$

7) $\begin{cases} x = \mu \\ y = \lambda \\ z = 8\,\lambda + 7\,\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\qquad 7\,x + 8\,y - z = 0$

8) $\begin{cases} x = 2 - 3\,\lambda + \mu \\ y = 5 + 2\,\lambda - \mu \\ z = 1 - \lambda + \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\qquad x + 2\,y + z - 13 = 0$

9) $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\qquad x - z = 0$

4.3 1) P$(1\,;1\,;1)$ 2) non

4.4 1) parallèles 2) sécants 3) confondus
4) parallèles 5) parallèles 6) sécants

4.5 $(1\,;-2\,;2)$

4.6

1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 2\,\lambda \\ z = 3 + 2\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \begin{cases} x = 1 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - 2\,\lambda \\ z = 5 - 2\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad x - 2 = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-5}{-2}$

3) $\begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 6 - 2\,\lambda \\ z = -12 + 5\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad x - 8 = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z+12}{5}$

4) $\begin{cases} x = 2 + 3\,\lambda \\ y = 3 - 2\,\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{-2} = z - 5$

5) $\begin{cases} x = 2\,\lambda \\ y = -13\,\lambda \\ z = 7\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-13} = \dfrac{z}{7}$

6) $\begin{cases} x = -8 \\ y = 10 \\ z = -12 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \begin{cases} x = -8 \\ y = 10 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \begin{cases} y = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = 8 \\ y = -4 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \begin{cases} x = 8 \\ y - z + 6 = 0 \end{cases}$

4.7 1) $(12\,;-3\,;-6)$ 2) $(-28\,;5\,;18)$ 3) $(\frac{16}{3}\,;-\frac{5}{3}\,;-2)$
4) $(\frac{3}{4}\,;-\frac{3}{4}\,;\frac{3}{4})$ 5) $(12\,;-3\,;-6)$

4.8 $(d) : \begin{cases} x = 4 + 9\,\lambda \\ y = -7 - 22\,\lambda \\ z = 5 + 11\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

4.9 1) confondues 2) sécantes 3) gauches
4) sécantes 5) strictement parallèles 6) strictement parallèles

4.11 $5\,x + 4\,y + 7\,z - 35 = 0$

4.12 1) $d \cap \pi = \varnothing$ 2) d coupe π 3) $d \subset \pi$ 4) d coupe π

4.13 1) $(1\,;2\,;3)$ 2) $(1\,;2\,;5)$

4.14 1) $\mathrm{P}(1\,;1\,;3)$ $\quad (\pi) : x - y + z - 3 = 0$
2) $\mathrm{P}(-1\,;4\,;-3)$ $\quad (\pi) : 2\,x + 17\,y - 10\,z - 96 = 0$

4.15 $\mathrm{D}'(1\,;2\,;-3)$

4.16 $\mathrm{A}(1\,;1\,;1)$, $\mathrm{B}(-1\,;3\,;5)$, $\mathrm{C}(-2\,;4\,;7)$ $\qquad (d_{\mathrm{AB}}) : \begin{cases} x = 1 - 2\,\lambda \\ y = 1 + 2\,\lambda \\ z = 1 + 4\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$