Objectif : Résoudre des équations et inéquations exponentielles - Rechercher des domaines de définition de fonctions composées.

On appelle (in)équation exponentielle toute équation où l'inconnue apparait en exposant. L'utilisation des propriétés des exponentielles permet de les résoudre (voir Aide Mémoire).

□ **Propriétés :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

- **a)** Si $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ alors $\exp_a(x) = \exp_a(y) \iff x = y$
- **b)** Si $a > 1$ alors la fonction est croissante et $\exp_a(x) > \exp_a(y) \iff x > y$
- **c)** Si $0 < a < 1$ alors la fonction est décroissante et $\exp_a(x) > \exp_a(y) \iff x < y$

□ **Exemple 1 :** Pour résoudre l'équation $4^{x-2} = 16$, on exprime les membres gauche et droite de l'équation en tant que puissances de même base et on égalise ensuite les exposants.

$$4^{x-2} = 16 \iff 4^{x-2} = 4^2 \overset{\text{PROP}}{\iff} x - 2 = 2 \iff x = 4$$

et l'ensemble des solutions est $S = \{4\}$

□ **Exemple 2 :** Résoudre $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} < \frac{1}{32}$

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^{3x} < \tfrac{1}{32} \iff \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right)^{3x} < \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \iff \left(\tfrac{1}{2}\right)^{6x} < \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \quad \overset{\text{prop (c)}}{\iff} \quad 6x > 5$$

et l'ensemble des solutions est $S = \left]\frac{5}{6}\,;\,+\infty\right[$

□ **Exemple 3 :** Emploi d'une variable auxiliaire !

Résoudre $3^x + 3^{-x} = \frac{82}{9}$

$$3^x + 3^{-x} = \frac{82}{9} \iff 3^x - \frac{82}{9} + \frac{1}{3^x} = 0 \quad \Big|\, \times 3^x > 0$$
$$\iff \left(3^x\right)^2 - \frac{82}{9} \cdot \left(3^x\right) + 1 = 0$$

En posant $T = 3^x$, on obtient une équation du second degré en T :

$$T^2 - \frac{82}{9} \cdot T + 1 = 0 \iff 9T^2 - 82T + 9 = 0 \iff T = 9 \quad \text{ou} \quad T = \frac{1}{9}$$

En revenant à la variable x : $\begin{cases} T = 9 \iff 3^x = 3^2 \iff x = 2 \\ T = \frac{1}{9} \iff 3^x = 3^{-2} \iff x = -2 \end{cases}$ $\boxed{S = \{-2;2\}}$

Rappel des propriétés des fonctions exponentielles

Deux notations différentes, mais équivalentes, sont couramment employées pour désigner les fonctions exponentielles : $\exp_a(x)$, qui fait référence à la base a élevée à la puissance x, et a^x, une forme plus conventionnelle.

Ci-dessous, vous trouverez une liste de six propriétés essentielles associées à ces notations.

$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ et x, y variables réelles :

(a)	$\exp_a(-x) = \exp_{1/a}(x)$	$\iff$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
(b)	$\exp_a(x) \cdot \exp_a(y) = \exp_a(x+y)$	$\iff$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
(c)	$\frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)} = \exp_a(x-y)$	$\iff$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
(d)	$\left(\exp_a(x)\right)^y = \exp_a(x \cdot y)$	$\iff$	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
(e)	$\exp_{ab}(x) = \exp_a(x) \cdot \exp_b(x)$	$\iff$	$(ab)^x = a^x \cdot b^x$
(f)	$\exp_{\frac{a}{b}}(x) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_b(x)}$	$\iff$	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Exercices

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(a) $11^{x^2+3} = 11^{2x^2-6}$

Solution: rappel : $a^x = a^y \iff x = y$ on ne supprime pas les "a", on applique la propriété!
$x^2+3 = 2x^2-6 \iff x = 3,\ x = -3$ S= $\{\pm 3\}$

(b) $3^{2x} - 3^{x-2} = 0$

Solution: $3^{2x} = 3^{x-2} \iff 2x = x-2$ S= $\{-2\}$

(c) $(0,5)^{3x-1} = 1$

Solution: $(0,5)^{3x-1} = 1 \iff (0,5)^{3x-1} = (0,5)^0 \iff 3x-1 = 0$ S= $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

(d) $4^{1-2x} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{x}{2}} = 0$

Solution: S= $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

(e) $0,25^{1-3x} = 4^{2x+3}$

Solution: $0,25^{1-3x} = 4^{2x+3} \iff 4^{3x-1} = 4^{2x+3}$ $S = \{4\}$
$\iff 3x-1 = 2x+3$

(f) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} = \frac{16}{9}$

Solution: $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x} = \dfrac{16}{9} \iff \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$ $S = \{-1\}$
$\iff 2x = -2$

(g) $0,2^{(-x^2)} \cdot 25^x = 125$

Solution: $0,2^{(-x^2)} \cdot 25^x = 125 \iff \left(\dfrac{1}{5}\right)^{(-x^2)} \cdot \left(5^2\right)^x = 5^3$ $S = \{-3\,;\,1\}$
$\iff 5^{(x^2)} \cdot 5^{2x} = 5^3$
$\iff 5^{(x^2+2x)} = 5^3$
$\iff x^2+2x = 3$
$\iff x^2+2x-3 = 0$

(h) $3^{4x-1} = 27^{2x}$

Solution: $3^{4x-1} = 27^{2x} \iff 3^{4x-1} = \left(3^3\right)^{2x}$ $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
$\iff 3^{4x-1} = 3^{6x}$
$\iff 4x-1 = 6x$

(i) $27 \cdot 3^x = 81^{2x+1}$

Solution: $27 \cdot 3^x = 81^{2x+1} \iff 3^3 \cdot 3^x = \left(3^4\right)^{2x+1}$ $S = \left\{-\frac{1}{7}\right\}$
$\iff 3^{x+3} = 3^{8x+4}$
$\iff x+3 = 8x+4$

(j) $4^{x+1} = 2^x\sqrt{2}$

Solution: $4^{x+1}=2^x\sqrt{2} \iff \left(2^2\right)^{x+1}=2^x 2^{1/2}$ $\quad S=\{-\frac{3}{2}\}$

(k) $\dfrac{1}{3^{x-1}}=81$

Solution: $\dfrac{1}{3^{x-1}}=81 \iff 3^{1-x}=3^4$ $\quad S=\{-3\}$

$\iff 1-x=4$

(l) $\left(3^{x-1}\right)^3=9\cdot 3^{x-2}$

Solution: $\left(3^{x-1}\right)^3=9\cdot 3^{x-2} \iff 3^{3x-3}=3^2\cdot 3^{x-2}$ $\quad S=\{\frac{3}{2}\}$

$\iff 3^{3x-3}=3^x$

$\iff 3x-3=x$

(m) $16^x=64$

Solution: $16^x=64 \iff 2^{4x}=2^6$ $\quad S=\{\frac{3}{2}\}$

$\iff 4x=6$

(n) $5^{3x+2}-\frac{1}{25}=0$

Solution: $5^{3x+2}=\dfrac{1}{25} \iff 5^{3x+2}=5^{-2}$ $\quad S=\{-\frac{4}{3}\}$

$\iff 3x+2=-2$

(o) $2^{x^2}\cdot 4^x=8$

Solution: $2^{x^2}\cdot 4^x=8 \iff 2^{x^2}\cdot 2^{2x}=2^3$ $\quad S=\{-3;1\}$

$\iff 2^{x^2}\cdot 2^{2x}\cdot 2^{-3}=1$

$\iff 2^{x^2+2x-3}=2^0$

$\iff x^2+2x-3=0$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$: (variable intermédiaire)

(a) $2\cdot 2^{6x-1}+3\cdot 2^{3x+1}+9=0$

Solution: $2\cdot 2^{6x-1}+3\cdot 2^{3x+1}+9=0 \iff 2\cdot 2^{6x}\cdot 2^{-1}+3\cdot 2^{3x}\cdot 2+9=0$

$\iff 2^{6x}+6\cdot 2^{3x}+9=0 \qquad$ on pose $u=2^{3x}$

$\iff u^2+6\cdot u+9=0$

$\iff (u+3)^2=0$

$\iff u=-3$

Or $u=2^{3x}$, d'où $u=-3$ devient $2^{3x}=-3$. Aucune solution possible car 2^{3x} est strictement positif pour tout réel x.

$$S=\emptyset$$

(b) $5\cdot 5^{4x+2}-26\cdot 5^{2x+2}+125=0$

Solution: $5\cdot 5^{4x+2}-26\cdot 5^{2x+2}+125=0 \iff 5\cdot 5^{4x}\cdot 5^2-26\cdot 5^{2x}\cdot 5^2+125=0$

$$\begin{aligned}
&\iff 5^3\cdot 5^{4x}-26\cdot 5^2\cdot 5^{2x}+5^3=0\\
&\iff 5^{4x}-\tfrac{26}{5}\cdot 5^{2x}+1=0 \qquad \text{on pose } u=5^{2x}\\
&\iff u^2-\tfrac{26}{5}u+1=0\\
&\iff u=5,\ u=\tfrac{1}{5}\\
&\iff 5^{2x}=5,\ 5^{2x}=5^{-1}\\
&\iff 2x=1,\ 2x=-1
\end{aligned}$$

$$\mathrm{S}=\{\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\}$$

(c) $9^x+3=4\cdot 3^x$

Solution: on pose $y=3^x$ (d'où $y^2=(3^x)^2=3^{2x}=\left(3^2\right)^x=9^x$)

$$\begin{aligned}
9^x+3=4\cdot 3^x &\iff y^2+3=4y\\
&\iff y^2-4y+3=0\\
&\iff y=1 \text{ ou } y=3\\
&\iff 3^x=3^0 \text{ ou } 3^x=3^1
\end{aligned}$$

donc $x=0$ ou $x=1$ et $\boxed{\mathrm{S}=\{0\ ;\ 1\}}$

(d) $5\cdot 3^{x-1}-2\cdot 3^{1-x}=3$

Solution:

on pose $y=3^{x-1}$ (d'où $\dfrac{1}{y}=3^{1-x}$)

$$\begin{aligned}
5\cdot 3^{x-1}-2\cdot 3^{1-x}=3 &\iff 5y-2\frac{1}{y}=3\\
&\quad \text{on mult. par } y \text{ à g. et à d.}\\
&\iff 5y^2-2=3y\\
&\iff 5y^2-3y-2=0\\
&\iff y=1 \text{ ou } y=-2/5\\
&\iff 3^{x-1}=1 \text{ ou } 3^{x-1}=-2/5
\end{aligned}$$

Comme 3^{x-1} est toujours strictement positif, $3^{x-1}=-2/5$ ne possède aucune solution.

Il reste $3^{x-1}=1 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^0 \Leftrightarrow x=1$.

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathrm{S}=\{1\}}$

(e) $2^x+4^x=2$

Solution:

on pose $y=2^x$ (d'où $y^2=4^x$)

$$\begin{aligned}2^x+4^x=2 &\iff y+y^2=2\\ &\iff y^2+y-2=0\\ &\iff y=1 \text{ ou } y=-2\\ &\iff 2^x=1\\ &\text{et donc } \boxed{\mathrm{S}=\{0\}}\end{aligned}$$

(f) $5^{2x}-30\cdot5^x+125=0$

Solution: on pose $y=5^x$ (d'où $y^2=5^{2x}$)

$$\begin{aligned}5^{2x}-30\cdot5^x+125=0 &\iff y^2-30y+125=0\\ &\iff y=5 \text{ ou } y=25\\ &\iff 5^x=5 \text{ ou } 5^x=25\\ &\text{d'où } \boxed{\mathrm{S}=\{1\ ;\ 2\}}\end{aligned}$$

(g) $2^x+2^{3+x}=\frac{9}{4}$

Solution:

on pose $y=2^x$

$$\begin{aligned}2^x+2^{3+x}=\frac{9}{4} &\iff 2^x+2^3\cdot2^x=\frac{9}{4}\\ &\iff y+8\cdot y=\frac{9}{4}\\ &\iff (1+8)\cdot y=\frac{9}{4}\\ &\iff 9\cdot y=\frac{9}{4}\\ &\iff y=\frac{1}{4}\\ &\iff 2^x=2^{-2} \quad \text{d'où } \boxed{\mathrm{S}=\{-2\}}\end{aligned}$$

Cet exercice aurait pu être résolu sans passer par un changement de variable.

(h) $30\cdot3^x-9^x-81=0$

Solution: on pose $y=3^x$ (d'où $y^2=9^x$)

$$\begin{aligned}30\cdot3^x-9^x-81=0 &\iff y^2-30y+81=0\\ &\iff y=3 \text{ ou } y=27\\ &\iff 3^x=3 \text{ ou } 3^x=27\\ &\text{d'où } \boxed{\mathrm{S}=\{1\ ;\ 3\}}\end{aligned}$$

3 Résoudre les inéquations exponentielles suivantes :

(a) $9^{2x+1}>1$

Solution: S=$\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

(b) $2^{5x-3} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{2-x}$

Solution: S=$\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

(c) $0,2^{(-x^2)} \cdot 25^x > 125$

Solution: S=$]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

(d) $2^x - 16 \cdot 2^{3x+2} \leq 0$

Solution: S=$[-3;+\infty[$

(e) $0,17^{x^2-4} \leq 1$

Solution: S=$\mathbb{R} \setminus]-2;2[$

4 Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes en précisant clairement les différentes C.E. :

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3^x - 3}}{3^{2x-4} - \sqrt{3}}$

Solution: CE : $3^x - 3 \geq 0$ et $3^{2x-4} - \sqrt{3} \neq 0 \iff 3^x \geq 3$ et $3^{2x-4} \neq \sqrt{3}$

$\iff 3^x \geq 3^1$ et $3^{2x-4} \neq 3^{1/2}$

$\iff x \geq 1$ et $2x - 4 \neq 1/2$

$$\textbf{dom}\, f = [1;+\infty[\setminus \left\{\frac{9}{4}\right\}$$

(b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2+4^x}{2-4^x}}$

Solution: CE : $\dfrac{2+4^x}{2-4^x} \geq 0$

Or, $2 + 4^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc,

$$\text{CE} : \frac{2+4^x}{2-4^x} \geq 0 \iff \text{CE} : 2 - 4^x > 0 \iff x < \frac{1}{2}$$

$$\textbf{dom}\, f = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$$

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$: (exercices mélangés)

(a) $2^{2x} = 40 + 3 \cdot 2^x$

Solution: on pose $T = 2^x$

$$T^2 - 3T - 40 = 0 \iff T = 8\,,\,-5 \qquad \text{finalement :} \quad S = \{3\}$$

(b) $28 \cdot 8^{2x+1} + 1 \leq 7 \cdot 2^{x-4} + 1$

Solution:

— On se débarasse des deux 1 de chaque côté $28 \cdot 8^{2x+1} \leq 7 \cdot 2^{x-4}$

— On divise par 7 de chaque côté $4 \cdot 8^{2x+1} \leq 2^{x-4}$

— On ramène tout en base 2 et on utilise les lois des exposants.

$$2^2 \cdot (2^3)^{2x+1} \leq 2^{x-4} \iff 2^{6x+5} \leq 2^{x-4}$$

— Comme les bases sont les mêmes de chaque côté de l'inégalité, cette dernière demeure vraie pour les exposants : $6x + 5 \leq x - 4$

— On peut résoudre : $6x+5 \le x-4 \iff x \le -\frac{9}{5}$

$$S = \left]-\infty\,;\,-\frac{9}{5}\right]$$

(c) $\sqrt{6^{-2x}} - 216 \le 0$

Solution: $\sqrt{6^{-2x}} - 216 \le 0 \quad : \quad \left[\begin{array}{cc} \text{Solution :} & S = \{x \ge -3 \mid x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Autre Notation :} & S = [-3, \infty[\end{array}\right]$

(d) $64 \cdot \sqrt{8^{x-3}} = 0,125$

Solution: $64 \cdot \sqrt{8^{x-3}} = 0,125 \iff 8^{(x-3)\frac{1}{2}} = 8^{-3} \implies S = \{-3\}$

(e) $4^{2(x-1)} + 1 \le \dfrac{2,5}{4^{1-x}}$

Solution: $4^{2(x-1)} + 1 \le \dfrac{2,5}{4^{1-x}} \iff T^2 + 1 \le \dfrac{2,5}{T^{-1}}$ on pose : $T = 4^{x-1} = 2^{2(x-1)}$

$$\iff 2T^2 - 5T + 2 \le 0$$

$$\iff \frac{1}{2} \le T \le 2$$

$$\iff 2^{-1} \le 2^{2(x-1)} \le 2^1$$

$$\iff -1 \le 2x-2 \le 1 \quad \text{fonction strictement croissante!}$$

$$\implies S = \left[\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right]$$

(f) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \le 5^{2x-1}$

Solution: $5^{-x} \le 5^{2x-1} \iff -x \le 2x-1 \iff 3x \ge 1$ et S= $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

(g) $9^{x+1} < 3^{1-2x}$

Solution: $9^{x+1} < 3^{1-2x} \iff 3^{2x+2} < 3^{1-2x} \iff 2x+2 < 1-2x$ et S= $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[$

(h) $4 \cdot 2^{2x-3} - 1 > 0$

Solution: $4 \cdot 2^{2x-3} > 1 \iff 2^{2x-1} > 2^0 \iff 2x-1 > 0$ et S= $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

(i) $3^{5-6x} - \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{x^2}{3}} < 0$

Solution: $3^{5-6x} < \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{x^2}{3}} \iff 3^{5-6x} < 3^{-x^2} \iff 5-6x < -x^2 \iff x^2-6x+5 < 0$ et S= $]1;5[$

(j) $27^x - 9^x - 3^{x+1} + 3 \ge 0$

Solution: laissé au lecteur

(k) $3^{x-2} - 3^{\frac{x-8}{2}} < 9^{\frac{x+4}{4}} - 1$

Solution: recherche des racines puis faire un tableau de signes (TS) !

racines : $3^{x-2} - 3^{\frac{x-8}{2}} - 9^{\frac{x+4}{4}} + 1 = 0 \iff x = -4,\ x = 8$

TS $\rightarrow$ S=$]-4;8[$