1 Calculer :

(a) $\log_6 12 + \log_6 3 =$ $\log_6 36 = 2$

(b) $\log 250 + \log 40 =$ $\log 10\,000 = 4$

(c) $\log_8 \frac{3}{64} + \log_8 \frac{1}{3} =$ $\log_8\left(\frac{3}{64} \times \frac{1}{3}\right) = \log_8\left(\frac{1}{64}\right) = -2$

(d) $\log_6 72 - \log_6 2 =$ $\log_6\left(\frac{72}{2}\right) = \log_6(36) = 2$

(e) $\log_{12} 2 - \log_{12} 288 =$ $\log_{12}\left(\frac{1}{144}\right) = -2$

(f) $\log_2 \frac{3}{4} - \log_2 \frac{3}{8} =$ $\log_2\left(\frac{3}{4} \div \frac{3}{8}\right) = \log_2\left(\frac{3}{4} \times \frac{8}{3}\right) = \log_2(2) = 1$

(g) $\log_3 9^{35} =$ $35 \log_3(9) = 70$

(h) $\log \sqrt{1000} =$ $\log\left(1000^{1/2}\right) = 1/2 \cdot \log 1000 = 3/2$

2 Sachant que $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, déterminez les logarithmes suivants :

(a) $\log_a a^3$

(b) $\log_a \sqrt{a}$

(c) $\log_a \frac{1}{a^2}$

(d) $\log_a \sqrt[3]{a^5}$

(e) $\log_a \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$

(f) $\log_a \frac{1}{a^2 \sqrt[4]{a}}$

3 En utilisant les propriétés des logarithmes, calculer sans calculatrice $\log_5\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{25}\right)$

Solution: $\log_5 \dfrac{\sqrt[3]{5}}{25} = \log_5\left(\sqrt[3]{5}\right) - \log_5(25) = \log_5\left(5^{1/3}\right) - \log_5\left(5^2\right) = \dfrac{1}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3}$

4 En utilisant les lois des logarithmes, simplifie l'expression suivante :

$$\log_4\left(6x^2\right) + \log_4(9xy) - \log_4(2y)$$

Solution: Utiliser les lois des logarithmes avec ceux qui ont la même base.

$$\begin{aligned}
\log_4 6x^2 + \log_4 9xy - \log_4 2y &= \log_4\left(\frac{54x^3y}{2y}\right)\\
&= \log_4 27x^3\\
&= \log_4 (3x)^3\\
&= 3\log_4 3x
\end{aligned}$$

5 Utilisez les propriétés des logarithmes pour développer $\log_6\left(\frac{216}{x^3y}\right)^4$ (avec $x, y \in \mathbb{R}_0^+$)
La réponse attendue contiendra une somme de trois termes dont deux faisant intervenir $\log_6 x$ et $\log_6 y$ à un facteur multiplicatif près.

Solution:

$$\begin{aligned}
\log_6\left(\frac{216}{x^3y}\right)^4 &= 4 \cdot \log_6\left(\frac{216}{x^3y}\right)\\
&= 4 \cdot \left(\log_6 6^3 - \log_6 x^3 - \log_6 y\right)\\
&= 4 \cdot \left(3 - 3 \cdot \log_6 x - \log_6 y\right)\\
&= 12 - 12\log_6 x - 4\log_6 y
\end{aligned}$$

6 Si $\log_a x^2 = 0,6$, trouve la valeur de $\log_a \sqrt{x}$.

Solution: On admettra $x \in \mathbb{R}_0^+$. Alors, $\log_a x^2 = 0,6 \implies \log_a(x) = 0,3$.
Dès lors, $\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_a(x) = 0,15$

7 Si $\log_a \mathrm{M} = x$ et $\log_b \mathrm{M} = y$, prouve que $\log_{ab} \mathrm{M} = \dfrac{xy}{x+y}$.

Solution:
$$\log_{ab}\mathrm{M} = \frac{\log(\mathrm{M})}{\log(a\cdot b)} = \frac{\log(\mathrm{M})}{\log(a)+\log(b)}$$
$$\frac{1}{\log_{ab}\mathrm{M}} = \frac{\log(a)}{\log(\mathrm{M})} + \frac{\log(b)}{\log(\mathrm{M})} = \frac{1}{\log_a \mathrm{M}} + \frac{1}{\log_b \mathrm{M}}$$
d'où : $$\log_{ab}\mathrm{M} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a\mathrm{M}} + \frac{1}{\log_b\mathrm{M}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{xy}{x+y}$$

8 Si $\log_b 2 = p, \log_b 3 = q$ et $\log_b 5 = r$, trouve $\log_b\left(\frac{50}{27}\right)$ en termes de p, q, et r.

Solution:
$$\begin{aligned}\log_b\left(\frac{50}{27}\right) &= \log_b\left(\frac{2\cdot 5^2}{3^3}\right)\\ &= \log_b(2) + 2\log_b(5) - 3\log_b(3)\\ &= p + 2r - 3q\end{aligned}$$

9 Sachant que $a > 1$, $t > 0$, $s > 0$ et que $\log_a\left(t^3\right) = p$, $\log_{\sqrt{a}}\left(s^2\right) = q$, exprimer $\log_a(st)$ uniquement en fonction de p et q.

Solution: $\log_a\left(t^3\right) = p \iff 3\log_a(t) = p \iff \log_a(t) = p/3$
par ailleurs, $$\begin{aligned}\log_{\sqrt{a}}\left(s^2\right) = q &\iff 2\log_{\sqrt{a}}(s) = q\\ &\iff \log_{\sqrt{a}}(s) = q/2\\ &\iff 2\log_a(s) = q/2\\ &\iff \log_a(s) = q/4\end{aligned}$$
dès lors, $\log_a(st) = \log_a(s) + \log_a(t) = \boxed{\dfrac{q}{4} + \dfrac{p}{3}}$

10 Résolvez les équations suivantes d'inconnue x ($a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$) :

(a) $\log_x 125 = 3$
(b) $\log_2 x = 7$
(c) $\log_x a = 1$
(d) $\log 10^{-12} = x - 1$
(e) $\log_x 2 = -2$
(f) $\log_3(x^2+1) = 2$

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$: (n'oubliez pas les CE!)

(a) $\log_{0,3} x = 1$

Solution: $x = 0,3$ car $\log_{0,3} x = 1 \iff 0,3^1 = 0,3$. Par conséquent, $\mathbf{S} = \{0,3\}$

(b) $\log x = -2$

Solution: $x = 0,01$ car $\log x = -2 \iff 10^{-2} = 0,01$.

(c) $\log_2(x-3) + \log_2 x = 2$

Solution: CE : $x-3>0$ et $x>0$ qui se simplifie en CE : $x>3$

$$\begin{aligned}\log_2(x-3)+\log_2 x=2 &\iff \log_2 x(x-3)=\log_2 4\\ &\iff x(x-3)=4\end{aligned}$$

(d) $\log_8(x-5)+\log_8(x+2)=1$

Solution: CE : $x>5$

$$\log_c(a)+\log_c(b)=\log_c(ab)$$

$\log_8(x-5)+\log_8(x+2)=1 \iff \log_8((x-5)(x+2))=1$

$$\log_a(b)=c \iff b=a^c$$

$$\begin{aligned}&\iff (x-5)(x+2)=8^1\\ &\iff x^2-3x-18=0\end{aligned}$$

$$S=\{6\}$$

(e) $\log_3(1-3^x)=x+\log_3 4$

Solution:

(f) $\log\left(1-\log x\right)-2=0$

Solution:

(g) $\log_{3/5}(x+1)\geq 2$

Solution: $x+1\leq\frac{9}{25}$ et $x+1>0$

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-1<x\leq-\frac{16}{25}\right\}=\left]-1;\frac{16}{25}\right]$$

(h) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1-x^2}{x}\right)<\log_3(x)$

Solution: Tableau des signes de $\frac{1-x^2}{x}$:

x		-1		0		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-x^2}{x}$	$+$	0	$-$	$//$	$+$	0	$-$

$$\text{CE}:\begin{cases}\frac{1-x^2}{x}>0\\ x>0\end{cases}\iff\begin{cases}x\in]-\infty;-1[\cup]0;1[\\ x\in]0;+\infty[\end{cases}\iff x\in]0;1[$$

$$
\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{1-x^2}{x}\right) < \log_3(x) &\iff \frac{\log\left(\frac{1-x^2}{x}\right)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} < \frac{\log x}{\log 3} \\
&\iff -\frac{\log\left(\frac{1-x^2}{x}\right)}{\log 3} < \frac{\log x}{\log 3} && \text{car } \log\left(\tfrac{1}{3}\right) = -\log 3 \\
&\iff -\log\left(\tfrac{1-x^2}{x}\right) < \log x && \text{car } \log 3 > 0 \\
&\iff \log\left(\tfrac{1-x^2}{x}\right)^{-1} < \log x \\
&\iff \log\left(\tfrac{x}{1-x^2}\right) < \log x \\
&\iff \frac{x}{1-x^2} < x \\
&\iff \frac{x^3}{1-x^2} < 0 && \text{tableau des signes} \\
&\iff x \in]-1;0[\cup]1;+\infty[
\end{aligned}
$$

Dès lors : $S = \varnothing$ (Voir CE)

12 Les fonctions $f : x \mapsto \log(x-1) - \log(x+4)$ et $g : x \mapsto \log\left(\frac{x-1}{x+4}\right)$ sont-elles égales ?

Rappel : *Deux fonctions sont égales lorsque leurs expressions analytiques **ET** leurs domaines de définition sont égaux.*

Solution:

1. $f(x) = g(x)$: en utilisant la formule $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
2. dom $f \neq$ dom g car :

$\text{CE}_f : \begin{cases} x-1>0 \\ x+4>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>1 \\ x>-4 \end{cases} \iff x>1$ dom $f =]1;+\infty[$

$\text{CE}_g : \frac{x-1}{x+4} > 0$

x		-4		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

dom $g = \mathbb{R}\setminus[-4;1]$

Ces deux fonctions ne sont donc pas identiques

13 Rechercher le domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \log_x(1-x^2)$.

Solution: CE : $\begin{cases} x \in]0;1[\cap]1;+\infty[\\ 1-x^2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in]0;1[\cap]1;+\infty[\\ x \in]-1;1[\end{cases}$

d'où **dom** $f =]0;1[$