Somme de Riemann à droite : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x$ avec $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x$$

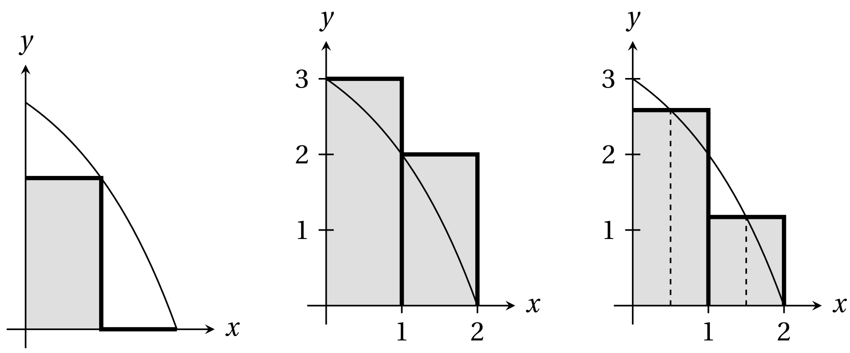
Somme de Riemann à gauche : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} f(a+(k-1)\Delta x)\Delta x$

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a+(k-1)\Delta x)\Delta x$$

Méthode du point milieu : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)\Delta x\right)\Delta x$

on fait coïncider le milieu du coté haut du rectangle avec la courbe

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)\Delta x\right)\Delta x$$



(a) à droite (b) à gauche (c) Point milieu

FIGURE 1 – Estimations d'aires par polygones. $y = 4 - 2^x$

Exercices

1 Estime l'aire sous la courbe d'équation $y = x^2 + 2x + 3$ pour x variant entre -2 et 2. Utilise une partition qui consiste en 4 sous-intervalles de $[-2;2]$ et une somme de Riemann à droite.

....

2 On veut estimer l'intégrale définie $\displaystyle\int_{0,1}^{0,25} 2^x\ \mathrm{d}x$. Utilise trois sous-intervalles de même longueur et la somme de Riemann à gauche.

Quelle est la valeur approchée de cette intégrale ?

....

3 On veut estimer l'intégrale définie $\displaystyle\int_{2}^{2,25} \log(x)\ \mathrm{d}x$. Utilise cinq sous-intervalles de même longueur et la somme de Riemann à gauche.

Quelle est la valeur approchée de cette intégrale ?

....

4 On veut estimer l'intégrale définie $\int_{10}^{20} (1+x)^2 \, \mathrm{d}x$. Pour ce faire, on utilise 10 rectangles de même base et une somme de Riemann à droite.

Quelle est l'aire du premier rectangle (celui qui est le plus à gauche) ?

....

5 On veut estimer l'intégrale définie $\int_{2}^{6} f(x) \, \mathrm{d}x$ en calculant la somme $\sum_{k=1}^{n} f(2+k\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$.

Calculer n sachant que $\Delta x = 0,2$.

....

6 L'intégrale définie $\int_{0}^{5} x^2 \, \mathrm{d}x$ est calculée à partir de la limite de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{A}{n}\left(\frac{k\cdot A}{n}\right)^2$.

Quelle valeur de A doit apparaître dans cette somme ?

....

7 La valeur exacte de l'intégrale définie $\int_{1}^{6} x^3 \, \mathrm{d}x$ est calculée par

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{A}{n}\left(1+k\cdot\frac{A}{n}\right)^3$$

Quelle est la valeur de A ?

....

8 On veut estimer l'intégrale définie $\int_{2}^{6} f(x) \, \mathrm{d}x$ par une somme d'aires de n rectangles de base identique.

Si on utilise la borne supérieure de chaque sous-intervalle pour déterminer la hauteur de chaque rectangle et que cette somme est évaluée par

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(B+k\cdot\frac{A}{n}\right)\cdot\frac{A}{n}$$

Que vaut A et B ?

....

9 L'intégrale définie $\int_{7}^{10} (1+x)^2 \, \mathrm{d}x$ est calculée à partir de la limite de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n}\left(A+k\frac{3}{n}\right)^2$.

Quelle valeur de A doit apparaître dans cette somme ?

....

10 On donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{1+x^3}$ une fonction **positive** et **croissante** sur l'intervalle $[0;2]$ et on considère l'intégrale définie

$$A = \int_{0}^{2} f(x) \, \mathrm{d}x$$

En subdivisant l'intervalle d'intégration en 4 sous-intervalles d'égale longueur, calculez la valeur exacte de la différence entre les sommes de Riemann à gauche et à droite.

....